Devoir à la maison

Exercice 1. *Coïncidence*

1. Dans $E=\mathbb{R}^3$, soient $u_1=(1,1,-1)$, $u_2=(1,-1,3)$, $v_1=(1,0,1)$ et $v_2=(2,-1,4)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.
2. Dans $E=\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}\big((2,3,-1),(1,-1,2)\big)=\mathrm{Vect}\big((3,7,-4),(5,0,5)\big)$

Exercice 2. *Fonctions affines, et plus si affinités*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Soit $G=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})|\ f(0)=f(1)=0\}$; montrer que G est un sev de E et en donner un supplémentaire. (Indication : titre de l'exercice)

Exercice 3. *Premiers exemples de bases*

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u=(-1,1,1)$, $v=(1,-1,1)$, $w=(1,1,-1)$.

1. Vérifier qu'ils forment une base.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.
3. Mêmes questions avec les vecteurs $u=(1,2,3),\ v=(2,3,1),\ w=(3,1,2)$.

Exercice 4. *Sous-espaces définis par des équations*

1. Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0.\}$ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4|\ x-2y+z+t=0 \text{ et } 2x+y-z+t=0\}$. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^4$. Déterminer une base de F.
3. Soit $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y+2z-3t=0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 5. *Espace de polynômes*

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on note $P_0(X)=X^3$, $P_1(X)=(X-1)^3$ et $P_2(X)=(X-2)^3$ et l'on définit l'ensemble F par :

$$F=\{P\in E\mid P(0)+P(2)=8P(1)\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que la dimension de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer le rang de la famille (P_0,P_1,P_2).
4. Déterminer une base de F et sa dimension.