# Programme des colles du 02/04 au 05/04

1. Analyse asymptotique
   — Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
   — Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
   — Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
   — Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
   — Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
   — Développement limité d'une somme (ou d'une combinaison linéaire).
   — Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit.
   — Forme normalisée d'un développement limité.
   — Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
   — Développement limité d'une primitive
   — $\text{DL}_0$ et limite de fonction, $\text{DL}_1$ et dérivabilité en un point.
   — Lien entre régularité d'une fonction et développement limité : contre exemple $f : x \mapsto x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$ prolongé par continuité en 0 d'une fonction qui admet en tout point un DL à l'ordre $n$ avec $f'$ qui n'est pas continue en 0.
   — Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).
   — Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Espaces vectoriels.
   — Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   — Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   — **Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : connaître trois caractérisations et savoir prouver qu'elles sont équivalentes.**
   — Intersection de sous-espaces vectoriels.
   — Union de sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   — Familles de vecteurs, combinaisons linéaires
   — Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
   — Famille libre, famille liée.
   — Bases et coordonnées.
   — Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   — Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   — **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.**
   — Sous-espaces supplémentaires.
   — Espaces de dimension finie, existence de bases : théorème de la base incomplète.
   — Toute famille de $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par $n$ vecteurs est liée.
   — Si $E$ est dimension $n$ et $\mathcal{F}$ est une famille de $n$ vecteurs de $E$, alors $\mathcal{F}$ est une base de $E$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de $E$.
   — Rang d'une famille de vecteurs.
   — Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   — **Dimension d'une somme directe de deux s.e.v. de dimensions finies. Propriété et preuve à connaître**
   — Formule de Grassmann.
   — Supplémentaires d'un sous-espace : existence, caractérisation par l'intersection et les dimensions.