Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Coïncidence*

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 3)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 4)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
   On peut remarquer, par exemple en résolvant des systèmes à deux inconnues, que l'on a :
   $$v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2,$$
   $$v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2.$$
   On en déduit que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, or ces deux s.e.v. sont de dimension 2 puisqu'ils sont l'un comme l'autre engendrés par une famille de deux vecteurs non colinéaires donc on peut conclure qu'ils sont égaux.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}\big((2, 3, -1), (1, -1, 2)\big) = \mathrm{Vect}\big((3, 7, -4), (5, 0, 5)\big)$
   Ici, on peut remarquer que l'on a :
   $$(2, 3, -1) = \frac{3}{7}(3, 7, -4) + \frac{1}{7}(5, 0, 5),$$
   $$(1, -1, 2) = -\frac{1}{7}(3, 7, -4) + \frac{2}{7}(5, 0, 5).$$
   On en déduit que $\mathrm{Vect}\big((2, 3, -1), (1, -1, 2)\big) \subset \mathrm{Vect}\big((3, 7, -4), (5, 0, 5)\big)$, or ces deux s.e.v. sont de dimension 2 puisqu'ils sont l'un comme l'autre engendrés par une famille de deux vecteurs non colinéaires donc on peut conclure qu'ils sont égaux.

Exercice 2. *Fonctions affines, et plus si affinités*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires.
   On prouve d'abord que ces deux s.e.v. sont en somme directe. Soit donc f une fonction qui est à la fois dans F et G_a, f est donc une fonction constante qui vérifie $f(a) = 0$: on en déduit naturellement que $f = 0$.
   Prouvons maintenant que $F + G_a = E$. Soit donc $h \in E$, on a en notant $C = h(a)$:
   $$h = C + (h - C).$$
   Or $C \in F$ car C correspond naturellement à une fonction constante et $(h - C) \in G_a$ car la fonction $(h - C)$ vérifie naturellement $(h - C)(a) = h(a) - C = 0$.
2. Soit $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\ f(0) = f(1) = 0\}$; montrer que G est un sev de E et en donner un supplémentaire. (Indication : titre de l'exercice)
   Notons A le s.e.v. des fonctions affines, donc associées à des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Montrons alors que A et G sont supplémentaires.
   On prouve d'abord que A et G sont en somme directe : soit donc $f \in A \cap G$. f est donc une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1 qui admet deux racines : 0 et 1. On peut conclure que $f = 0$.
   On prouve alors que $A + G = E$. Soit $h \in E$, on note $a(x) = (h(1) - h(0))x + h(0)$ de sorte que $a \in A$ vérifie : $a(0) = h(0)$ et $a(1) = h(1)$. Or on a $h = a + (h - a)$ avec $a \in A$ et l'on vérifie aisément que $(h - a) \in G$ donc $h \in A + G$.
   On a bien prouvé que les deux s.e.v. sont supplémentaires.

Exercice 3. *Premiers exemples de bases : corrigé en cours*

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, -1)$.

1. Vérifier qu'ils forment une base.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.
3. Mêmes questions avec les vecteurs $u = (1, 2, 3),\ v = (2, 3, 1),\ w = (3, 1, 2)$.

Exercice 4. *Sous-espaces définis par des équations : corrigé en cours*

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0.\}$ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 |\ x - 2y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^4$. Déterminer une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + 2z - 3t = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 5. *Espace de polynômes*

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on note $P_0(X) = X^3$, $P_1(X) = (X - 1)^3$ et $P_2(X) = (X - 2)^3$ et l'on définit l'ensemble F par :

$$F = \{P \in E \mid P(0) + P(2) = 8P(1)\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que la dimension de E.
   E est de dimension 4, sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   F contient le polynôme nul.
   Si P et Q sont dans F, et que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a : $P(0)+P(2) = 8P(1)$ donc $\lambda P(0)+\lambda P(2) = 8\lambda P(1)$; $Q(0)+Q(2) = 8Q(1)$ donc $\mu Q(0)+\mu Q(2) = 8\mu Q(1)$. Enfin, on obtient $\lambda P(0)+\mu Q(0)+\lambda P(2)+\mu Q(2) = 8\lambda P(1)+8\mu Q(1)$, c'est à dire $(\lambda P+\mu Q)(0)+(\lambda P+\mu Q)(2) = 8(\lambda P+\mu Q)(1)$. On en déduit que $\lambda P + \mu Q \in F$.
3. Déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2). Etudions d'abord si la famille est libre, soient donc trois réels λ, μ et ν tels que :

   $$\lambda X^3 + \mu(X - 1)^3 + \nu(X - 2)^3 = 0$$

   $$\lambda X^3 + \mu(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + \nu(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) = 0$$

   $$(\lambda + \mu + \nu)X^3 + (-3\mu - 6\nu)X^2 + (3\mu + 12\nu)X - \mu - 8\nu = 0$$

   Les trois réels sont donc solution du système d'équations :
   $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ -3\mu - 6\nu &= 0 \\ 3\mu + 12\nu &= 0 \\ -\mu - 8\nu &= 0 \end{cases}$ De la somme des deux équations du milieu, on déduit $\nu = 0$ puis $\mu = 0$ à l'aide d'une des trois dernières équationbs, et enfin $\lambda = 0$ à l'aide de la première.
   La famille (P_0, P_1, P_2) est libre donc de rang 3.
4. Déterminer une base de F et sa dimension.

   F est un sous-espace de E donc il est de dimension ≤ 4. $F \neq E$ car le polynôme constant 1 n'est pas dans F. Ainsi, la dimension de F est ≤ 3. Enfin, on vérifie aisément que P_0, P_1 et P_2 sont dans F. Ainsi, Vect $_{\mathbb{R}}(P_0, P_1, P_2) \subset F$, et l'on déduit de la question précédente que la dimension de F est ≥ 3, c'est à dire que Dim $F = 3$. (P_0, P_1, P_2) étant libre, c'est une base de F.