Corrigé du devoir surveillé

1 Application des développements limités à l'étude d'une suite récurrente

On s'intéresse dans cette partie du devoir à la maison à la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$$

1. On va montrer dans cette première question que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ce quelle que soit la valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.

   (a) Etudier complètement la suite u lorsque $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On commence par remarquer que la fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin([0, \frac{\pi}{2}]) = [\sin(0), \sin(\frac{\pi}{2})] = [0, 1]$. Ainsi, $sin([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Si $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on démontre alors aisément par récurrence que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   Ensuite, une rapide étude de la fonction F définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $F(x) = \sin(x) - x$ nous indique qu'elle est strictement décroissante donc en particulier négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $F(0) = 0$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(u_n) \leq 0$, c'est à dire $\sin(u_n) - u_n \leq 0$ ou encore $u_{n+1} \leq u_n$. La suite étudiée est décroissante.
   Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on sait que la suite u est convergente vers une limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par passage des inégalités larges à la limite. Comme sin est continue sur l'intervalle, on a $l = \sin(l)$ donc $F(l) = 0$, c'est à dire $l = 0$ en raison de l'étude précédente.
   Ainsi, $\forall u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite u est convergente de limite 0.

   (b) Déduire de la question précédente le comportement de la suite u quand $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
   En posant dans ce cas $v_n = -u_n$, on remarque que la suite v vérifie toutes les hypothèses de la question précédente. Ainsi, v est décroissante de limite 0 donc u est croissante et tend vers 0.

   (c) Montrons enfin que si $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   En effet, on sait que $u_1 \in \sin(\mathbb{R})$ donc $u_1 \in [-1, 1]$. Ainsi, u_1 est dans l'un des deux intervalles $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ou $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Selon le cas, les questions précédentes nous assurent que u sera croissante ou décroissante à partir du rang 1 et de limite 0.

2. On suppose désormais, et ce pendant toute la suite de cet exercice, que $u_1 > 0$.
   Si cette condition est vérifiée, on aura $u_1 \in]0, 1]$ puisque $u_1 = \sin(u_0) \in [-1, 1]$. Cet intervalle, $]0, 1]$, est stable par sin donc tous les termes de la suite u seront dans cet intervalle à partir du rang 1.

3. Soit $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

   Calculons le développement limité de f à l'aide de celui du sinus à l'ordre 3 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))^2} - 1\right)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-2\frac{x^2}{6}+o(x^2)} - 1\right)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)} - 1\right)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2) - 1\right)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + o(1).$$

Ainsi, on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue en 0 avec $\tilde{f}(0) = \frac{1}{3}$.

4. On définit la suite v_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

   (a) Comme $u_n \to 0$, on a $v_n = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(0) = \frac{1}{3}$.

   (b) On rappelle le résultat suivant vu en exercice et connu sous le nom de théorème de Césaro ; si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors on a également :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

   On sait donc que $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} v_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$, ou encore que $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} v_i \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$, d'où l'on déduit $\sum_{i=0}^{n-1} v_i \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$.

   (c) Calculons alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2} + \cdots + \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$$

   On en déduit que $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{3}n + o(n)$, soit $\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{3}n + o(n)$ d'où $\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3}n$.

   (d) On a enfin $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{n}$, or la suite u est positive et on en déduit donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

2 Développements limités, asymptotiques

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.1 Etude de f en 0

1. Calculons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$:

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

2. Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, sans nouveaux calculs, que :
   — f est continue en 0 ?
   — f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
   La réponse à ces deux premières questions est positive : il est équivalent d'être dérivable en 0 et d'admettre un $DL_1(0)$. On peut ainsi déterminer la valeur $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
   — f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
   En revanche, l'existence d'un $DL_2(0)$ ne nous dit rien quand à la dérivabilité de f à l'ordre 2 : il existe en effet des fonctions qui admettent un $DL_2(0)$ mais qui ont une dérivée qui n'est pas continue en 0 (exemple : $x \mapsto x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$).
3. Calculons la dérivée f' pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}-x(1+x)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{2}$ et f' est donc continue en 0. Comme f' est continue partout ailleurs, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Etude globale (pas demandé dans le DS)

On note g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

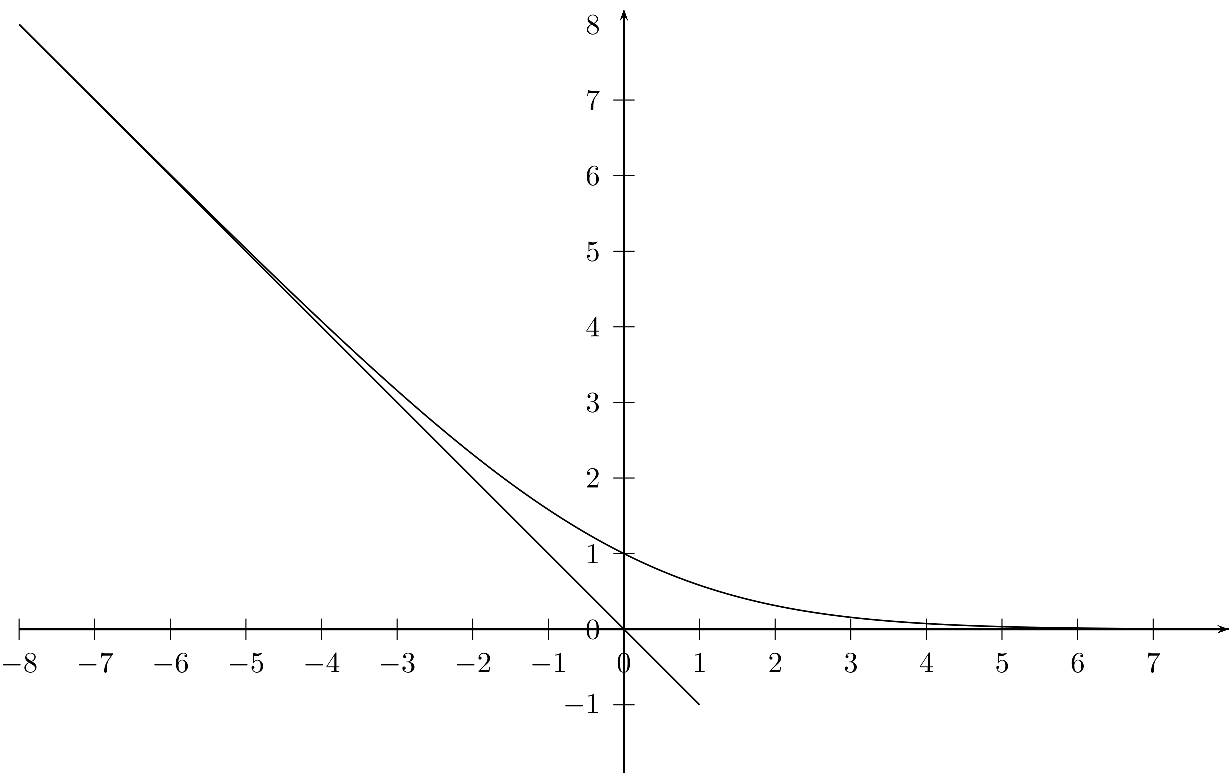
1. La fonction g est dérivable de dérivée $g'(x) = xe^x$, donc g est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	1	0	$+\infty$

Comme $g(0) = 0$, on déduit des variations de g que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On remarque que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Cette dérivée est de signe négatif (y compris en 0 d'après l'énoncé) donc f est décroissante.

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, et $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de cette asymptote car $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En $-\infty$, la méthode du changement de variables $x = \frac{1}{t}$ ne simplifie pas le problème.
   On peut observer que $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on obtient par composition de développements limités
   $\frac{1}{1-e^x} \underset{x\to-\infty}{=} 1 + e^x + o(e^x)$, d'où $\frac{-x}{1-e^x} \underset{x\to-\infty}{=} -x - xe^x + o(xe^x)$.
   On en déduit $f(x) - (-x) \underset{x\to-\infty}{=} -xe^x + o(xe^x)$. Ainsi, $f(x) - (-x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y = -x$ est l'asymptote de $\mathcal{C}_f$.
   On a plus précisément : $f(x) - (-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -xe^x$. Ces équivalents ont le même signe (positif) au voisinage de $-\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de son asymptote pour x près de $-\infty$.
   Le calcul explicite de $f(x)-(-x) = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$ garantit même que f est au-dessus de cette asymptote sur $\mathbb{R}^*$, et donc sur $\mathbb{R}$ puisque ceci est vérifié en 0.
4. Courbe de f :



2.2 Développement asymptotique d'une suite

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, on la notera x_n.
   La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et continue. Puisque ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $+\infty$ et 0, on en déduit qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n = f^{-1}(n)$.
2. Déterminer le sens de variations de la suite (x_n) ainsi définie, et sa limite.
   Puisque f est une bijection continue décroissante de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, on sait que f^{-1} est décroissante, que sa limite en 0 est $+\infty$ et surtout que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$.
   Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite $-\infty$.
3. Montrer, à l'aide de l'équation $f(x_n) = n$, que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$.

On sait que $\dfrac{x_n}{e^{x_n}-1} = n$ donc $\dfrac{x_n}{-n} = 1 - e^{x_n}$. Ainsi, puisque $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $\dfrac{x_n}{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

4. On définit la suite $y_n = n + x_n$ de sorte que $x_n = -n + y_n$ où $y_n \underset{n\to\infty}{=} o(n)$.

   Grâce à l'équation vérifiée par x_n, on obtient $\dfrac{-n+y_n}{e^{-n+y_n}-1} = n$, donc $-n + y_n = n(e^{-n+y_n} - 1)$ c'est à dire que $y_n = ne^{-n+y_n}$.

   Puisque $y_n \underset{n\to\infty}{=} o(n)$, on a $-n + y_n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$. Ainsi, on a pour n assez grand : $-n + y_n \leq -\dfrac{n}{2}$ (prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite de $\dfrac{-n+y_n}{-n}$ qui vaut 1).

   On en déduit que $0 \leq y_n \leq ne^{-\frac{n}{2}}$ et donc $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement.

   Enfin, on écrit $y_n = e^{y_n} ne^{-n}$. Puisque $e^{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc $y_n \underset{n\to\infty}{\sim} ne^{-n}$.

5. Pour obtenir un terme supplémentaire du développement asymptotique, on écrit $y_n = ne^{-n} + z_n$ où $z_n \underset{n\to\infty}{=} o(ne^{-n})$. L'équation vérifiée par y_n nous donne :

$$ne^{-n} + z_n = e^{ne^{-n}+z_n} ne^{-n}$$

$$z_n = ne^{-n}(e^{ne^{-n}+z_n} - 1)$$

   Comme $ne^{-n} + z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $e^{ne^{-n}+z_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + ne^{-n} + z_n + o(ne^{-n} + z_n)$.

   Puisque $z_n \underset{n\to\infty}{=} o(ne^{-n})$, cela signifie simplement $e^{ne^{-n}+z_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + ne^{-n} + o(ne^{-n})$.

   On déduit alors de l'équation ci-dessus :

$$z_n \underset{n\to\infty}{=} ne^{-n}(ne^{-n} + o(ne^{-n}))$$

$$z_n \underset{n\to\infty}{=} n^2e^{-2n} + o(n^2e^{-2n})$$

3 Espaces vectoriels

Exercice 1. *Inclusion, sommes et réunions de sous-espaces vectoriels.*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

   L'implication $F \subset G$ ou $G \subset F \Rightarrow F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E est immédiate, puisque

$$F \subset G \text{ ou } G \subset F \Rightarrow F \cup G = G \text{ ou } F \cup G = F.$$

   Dans les deux cas, on en déduit que $F \cup G$ est un s.e.v. de E.

   Prouvons la réciproque par contraposée, c'est à dire :

$$F \not\subset G \text{ et } G \not\subset F \Rightarrow F \cup G \text{ n' est pas un sous-espace vectoriel de } E.$$

   Soient donc F et G vérifiant $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors on a un élément $f \in F$ tel que $f \notin G$, et un élément $g \in G$ tel que $g \notin F$.

   Si l'on avait $f + g = f' \in F$, alors $g = f' - f$ serait donc dans F puisque f et f' sont dans F qui est un s.e.v. de E. Ainsi, $f + g \notin F$.

   Si l'on avait $f + g = g' \in G$, alors $f = g' - g$ serait donc dans G puisque g et g' sont dans G qui est un s.e.v. de E. Ainsi, $f + g \notin G$.

   On a donc $f + g \notin F \cup G$ avec f et g qui sont dans $F \cup G$. $F \cup G$ n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Soient donc F, G et H trois s.e.v. tels que $G \subset F$. Prouvons d'abord : $F\cap(G+H) \subset G+(F\cap H)$. Soit donc $x \in F\cap(G+H)$, on a alors puisque $x \in G+H$, $g_x \in G$ et $h_x \in H$ tels que $x = g_x + h_x$. On a $h_x = x - g_x$ où $x \in F$ et $g_x \in F$ (car $g_x \in G$ et $G \subset F$), donc $h_x \in F$. Or on sait que $h_x \in H$, d'où $h_x \in (F \cap H)$ et $x = g_x + h_x \in G + (F \cap H)$.
Prouvons maintenant : $G + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. Soit $y \in G + (F \cap H)$, on a alors $g_y \in G$ et $j_y \in F \cap H$ tels que $y = g_y + j_y$. Puisque $g_y \in G$ et $j_y \in H$, on en déduit d'abord que $x \in G+H$. Puisque $g_y \in G$, on a également $g_y \in F$ car $G \subset F$ et $j_y \in F$. On en déduit que $x \in F$ puisqu'il est la somme de deux éléments du s.e.v. F. Ainsi, $x \in G + H$ et $x \in F$ donc $x \in F \cap (G + H)$.

Exercice 2. *Une famille libre*

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des complexes distincts et l'on note pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \ , \ \ \phi_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}.$$

Montrer que la famille $(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \cdots, \phi_{\alpha_n})$ est libre.
On prouve ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: pour $n = 1$, c'est évident puisque ϕ_{α_1} n'est pas la fonction nulle.
On suppose maintenant que c'est vrai au rang n, et l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ des complexes distincts. Soient alors λ_1, $\lambda_2, \cdots$, λ_{n+1} des complexes tels que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

Pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, on a donc aussi :

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 (x+y)} + \lambda_2 e^{\alpha_2 (x+y)} + \cdots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} (x+y)} = 0$$

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 y} e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 y} e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

Et l'on peut multiplier la 1ère relation par $e^{\alpha_{n+1} y}$, on a donc pour tout réel x :

$$\lambda_1 e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

On obtient par soustraction des deux lignes précédentes :

$$\lambda_1 \left(e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_{n+1} y}\right) e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 \left(e^{\alpha_2 y} - e^{\alpha_{n+1} y}\right) e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n \left(e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_n y}\right) e^{\alpha_n x} = 0$$

Ceci étant vrai pour tout x réel, on en déduit par hypothèse de récurrence que :

$$\lambda_1 \left(e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_{n+1} y}\right) = \lambda_2 \left(e^{\alpha_2 y} - e^{\alpha_{n+1} y}\right) = \cdots = \lambda_n \left(e^{\alpha_n y} - e^{\alpha_{n+1} y}\right) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

L'égalité du départ donne $\lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$ d'où $\lambda_{n+1} = 0$.
Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie à tout rang.