Programme des colles du 22/04 au 26/04

1. Espaces vectoriels.
   — Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   — Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   — Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   — Intersection de sous-espaces vectoriels.
   — Union de sous-espaces vectoriels F et G : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   — Familles de vecteurs, combinaisons linéaires
   — Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
   — Famille libre, famille liée.
   — Bases et coordonnées.
   — Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   — Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   — Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.
   — Sous-espaces supplémentaires.
   — Espaces de dimension finie, existence de bases : théorème de la base incomplète.
   — Toute famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
   — Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
   — Rang d'une famille de vecteurs.
   — Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   — **Dimension d'une somme directe de deux s.e.v. de dimensions finies. Propriété et preuve à connaître**
   — Formule de Grassmann.
   — Supplémentaires d'un sous-espace : existence, caractérisation par l'intersection et les dimensions.

2. Applications linéaires.
   — Définition de la linéarité, exemples.
   — Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   — Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
   — Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
   — Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   — Applications linéaires de rang fini.
   — Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   — **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.**
   Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$ (**La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours de maths, s'ils l'acceptent**)
   — **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
   — Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   — Espaces de dimension finie isomorphes.