# Corrigé du devoir à la maison

**Exercice 1.** *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$

1. On a :
$$(x,y,z,t)\in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ y-z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ y &=& y\\ z &=& y\\ t &=& t\end{array}\right.$$
Une base de $F$ est donc donnée par les deux vecteurs $v_1=(1,-1,-1,0)$ et $v_2=(0,0,0,1)$.
2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille $(v_1,v_2)$ par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que $(v_1,v_2,e_1,e_2)$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.
3. L'équation $au_1+bu_2+cu_3=0$ donne le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b-c &=& 0\\ a+2b &=& 0\\ a+3b-c &=& 0\\ a+4b &=& 0\end{array}\right.$$
ce qui donne facilement $b=0$ (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis $a=0$ et $c=0$. La famille est libre.
4. La famille $(u_1,u_2,u_3)$ est une famille génératrice de $G$. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de $G$ qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1+bu_2+cu_3$ un vecteur de $G$. On cherche les conditions sur $a,b,c$ pour qu'il soit élément de $F$. Il vient
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b-c &=& 0\\ 2a+4b-2c &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& -3b+c\\ b &=& c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -c\\ b &=& c\\ c &=& c\end{array}\right.$$
Ainsi, les vecteurs de $F$ et $G$ sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1+u_2+u_3)=c(-1,1,1,3)$. Une base de $F\cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1,1,1,3)$.
6. D'après la formule de Grassmann,
$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=2+3-1=4.$$
Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G=\mathbb{R}^4$.
7. Non, car $F\cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

**Exercice 2.** *Application linéaire sur un espace de polynômes*

Dans cet exercice, on considère l'espace $E=\mathbb{R}_3[X]$ et l'application $\Phi:E\to E$ définie par :
$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X)+X(P'(X)+P''(X)).$$

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc $u$ envoie bien $E$ dans $E$. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que $u$ est linéaire. Mais, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1-X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1-X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda\left(P + (1-X)P'\right) + \mu\left(Q + (1-X)Q'\right) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

$u$ est donc bien linéaire.

2. Déterminer la dimension et une base de Ker $\Phi - 3\ \mathrm{id}_E$.
Soit $P \in E$, on a donc $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\Phi(P) = aX^3 + bX^2 + cX + d + X(3aX^2 + 2bX + c + 6aX + 2b)$$
$$\Phi(P) = 4aX^3 + (3b + 6a)X^2 + (2c + 2b)X + d$$

On en déduit :

$$(\Phi - 3\ \mathrm{id}_E)(P) = 4aX^3 + (3b + 6a)X^2 + (2c + 2b)X + d - 3(aX^3 + bX^2 + cX + d)$$
$$(\Phi - 3\ \mathrm{id}_E)(P) = aX^3 + 6aX^2 + (-c + 2b)X - 2d$$

Ainsi, $P \in$ Ker $\Phi - 3\ \mathrm{id}_E$ si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ 6a &=& 0 \\ 2b - c &=& 0 \\ -2d &=& 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que ce sont les polynômes de la forme $P = bX^2 - 2bX$ où $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ker } \Phi - 3\ \mathrm{id}_E \;=\; \text{Vect } \left(X^2 - 2X\right)$$

est donc un s.e.v. de dimension 1.

3. Déterminer la dimension et une base de Ker $\Phi - 4\ \mathrm{id}_E$. Avec les notations de la réponse à la question précédente, on a :

$$(\Phi - 4\ \mathrm{id}_E)(P) = (6a - b)X^2 + (-2c + 2b)X - 3d$$

On est amené à résoudre cette fois ci le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6a - b &=& 0 \\ 2b - 2c &=& 0 \\ -3d &=& 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que ce sont les polynômes de la forme $P = aX^3 + 6aX^2 + 6aX$ où $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ker } \Phi - 4\ \mathrm{id}_E \;=\; \text{Vect } \left(X^3 + 6X^2 + 6X\right)$$

est donc un s.e.v. de dimension 1.

4. On note $f_1 = 1$, $f_2 = X$, $f_3 = X^2 + 2X$, $f_4 = X^3 + 6X^2 + 6X$.
   Calculer $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$, $\Phi^n(f_3)$, $\Phi^n(f_4)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   On remarque que $\Phi(f_1) = f_1$ et l'on en déduit par récurrence que $\Phi^n(f_1) = f_1$.
   On remarque que $\Phi(f_2) = 2f_2$ et l'on en déduit par récurrence que $\Phi^n(f_2) = 2^n f_2$.
   On remarque que $\Phi(f_3) = 3f_3$ et l'on en déduit par récurrence que $\Phi^n(f_1) = 3^n f_3$.
   On remarque que $\Phi(f_4) = 4f_4$ et l'on en déduit par récurrence que $\Phi^n(f_4) = 4^n f_4$
5. Exprimer $X^3$ dans la base $f$ et en déduire $\Phi^n(X^3)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   On trouve : $X^3 = f_4 - 6f_3 + 6f_2$ et l'on en déduit par linéarité de $\Phi^n$ :

$$\Phi^n(X^3) = \Phi^n(f_4) - 6\Phi^n(f_3) + 6\Phi^n(f_2)$$

$$\Phi^n(X^3) = 4^n f_4 - 6 \times 3^n f_3 + 6 \times 2^n f_2$$

**Exercice 3.** *Intersection d'hyperplans*

$E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 2$. On appelle hyperplan de $E$ tout sous-espace de dimension $n-1$.

1. Rappeler l'énoncé et les hypothèses de la formule de Grassmann concernant la dimension d'une somme.
   Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-e.v. E, alors $F+G$ et $F \cap G$ sont aussi de dimensions finies et l'on a :

$$\text{Dim } (F+G) = \text{Dim } (F) + \text{Dim } (G) - \text{Dim } (F \cap G).$$

2. Soit $H$ un hyperplan de $E$ et $F$ un sev de $E$.
   (a) Écrire la formule de Grassmann pour $H + F$.
   D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(H+F) = \dim H + \dim F - \dim(H \cap F)$$

$$\dim(H \cap F) = \dim H + \dim F - \dim(H+F)$$
$$\dim(H \cap F) = n - 1 + \dim F - \dim(H+F)$$

   (b) Justifier que l'on a $H + F = H$ ou $H + F = E$.
   Puisque $\dim H = n-1$ et que $H \subset H + F \subset E$, on a : $n - 1 \leq \dim(H+F) \leq n$. L'une de ces deux inégalités est une égalité, d'où l'on déduit par inclusion et égalité des dimensions que $H + F = H$ ou $H + F = E$.
   (c) Établir l'encadrement : $\dim F - 1 \leq \dim(F \cap H) \leq \dim F$ et étudier les cas d'égalité.
   D'après les deux questions précédentes, on a donc :

$$n - 1 + \dim F - n \leq \dim(H \cap F) \leq n - 1 + \dim F - (n-1)$$

$$\dim F - 1 \leq \dim(H \cap F) \leq \dim F$$

   On a $\dim(H \cap F) = \dim F$ lorsque $\dim(H+F) = n-1$, c'est à dire lorsque $\dim H = \dim(H+F)$ d'où $H = H + F$ puisque $H \subset H + F$ : ceci signifie $F \subset H$.
   Si $F$ n'est pas inclus dans $H$, alors $H + F$ est un sous-espace qui contient strictement $H$ donc $\dim(H+F) = n$ puisque $H + F$ est de dimension strictement plus grande que $H$. C'est dans ce cas que l'on a $\dim F - 1 = \dim(H \cap F)$.

3. Soient $H_1, \ldots, H_p$ des hyperplans de $E$ ; montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \;\geq\; n-p$.
   Pour $p = 1$, l'initialisation est la définition d'un hyperplan.
   Hérédité de la propriété : soient $H_1, H_2, ..., H_{p+1}$ des hyperplans et supposons que :
   $$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \;\geq\; n-p$$
   Posons $F = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p$, on a alors : $\dim F - 1 \leq \dim(F \cap H_{p+1})$ d'après la question précédente donc $n-p-1 \leq \dim(F \cap H_{p+1})$, c'est à dire :
   $$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p \cap H_{p+1}) \;\geq\; n-(p+1)$$
   La propriété est ainsi héréditaire, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4.** *Endomorphisme d'un espace de fonctions sinus/cosinus*

On note $E$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda\cos + \mu\sin$ avec $\lambda$ et $\mu$ réels.

1. Par définition, $E$ est le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les deux fonctions cos et sin. Il s'agit donc de prouver que $(\cos, \sin)$ est une famille libre.
   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda\cos + \mu\sin = 0$. Ceci signifie :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\; \lambda\cos x + \mu\cos x = 0.$$
   Ainsi, on en déduit pour $x = 0$ que $\lambda = 0$ puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ que $\mu = 0$.
   La famille $(\cos, \sin)$ est libre et génératrice, c'est une base.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application $D$ de $E$ dans $E$, qui est un endomorphisme.
   $D$ est tel que pour tous $\lambda$, $\mu$ réels, on a $D(\lambda\cos + \mu\sin) = -\lambda\sin + \mu\cos$. Ainsi, $D(E) \subset E$ donc l'opérateur de dérivation définit bien un endomorphisme de $E$.
3. Montrer que $D$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur $v$ de $E$, il existe un unique vecteur $u$ de $E$ tel que $Du = v$.
   On vérifie d'abord l'injectivité : soit $u \in \operatorname{Ker} D$, on a donc $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $u = \lambda\cos + \mu\sin$ et $D(u) = 0$.
   On en déduit :
   $$-\lambda\sin + \mu\cos = 0$$
   d'où $\lambda = \mu = 0$ et donc $u = 0$. $D$ est injective sur $E$ puisque $\operatorname{Ker} D = \{0_E\}$.
   On vérifie alors la surjectivité : si $u \in E$, on a donc $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $u = \lambda\cos + \mu\sin$ et l'on remarque que $u = D(\lambda\sin - \mu\cos)$ admet un antécédent par $D$.
4. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme $D^{-1}$ de $E$ tel que, pour tout vecteur $u$ de $E$ on a $D\left(D^{-1}(u)\right) = u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right) = u$.
   Le cours garantit que $D^{-1}$, la bijection réciproque de $D$, est aussi un isomorphisme. Si $u = \lambda\cos + \mu\sin$ où $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, on vient de voir que :
   $$D^{-1}(u) = \lambda\sin - \mu\cos.$$