Matrices et applications linéaires

Exercice 1. *Matrice d'une application linéaire*
Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 2. *Noyau et Image d'une matrice*
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de Ker u et Im u.

Exercice 3. *Noyau et Image à l'aide de la matrice*
Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1,-2,0)$, $w_2 = (-1,2,0)$, $w_3 = (0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = w_1 \ , u(\mathcal{E}_2) = w_2 \ , u(\mathcal{E}_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.
   En déduire la matrice de u dans la base canonique.
   (b) Soit $W = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. (a) Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer $\ker(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. *Inverse et Puissances d'un endomorphisme à l'aide de sa matrice*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (y-z, -3x+4y-3z, y-x).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$; en déduire que A est inversible, et donner son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B_n = A^n + A - 2I$.
   (a) Montrer que $B_{n+1} = 2B_n$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 5. *Image et Noyau supplémentaires*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\Im f$, une base de $\ker f$. A t-on $\ker f \oplus \Im f = \mathbb{R}^3$?

Exercice 6. *Rang de matrice et équation de l'image*
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de u, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 7. *Complétion de base*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ de matrice dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker f$. La compléter en une base avec des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 8. *Matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad u(P) = P' + P.$$

Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. L'endomorphisme u est-il inversible ?
Si oui, donner la matrice de u^{-1} dans la base canonique.

Exercice 9. *Inverse de la matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*
Soit :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Ecrire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer A^{-1}.

Exercice 10. *Endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$*
Soient a, b dans $\mathbb{C}$ distincts et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ & P & \mapsto & (X-a)(X-b)P'(X) - n\left(X - \dfrac{a+b}{2}\right)P(X) \end{array}$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 11. *Matrice de projecteur*

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projecteur.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 12. *Matrice nilpotente d'indice maximal*

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

1. Calculer J^p pour $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $J^{n-1} \neq 0$ et $J^n = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$. (On dit que M est nilpotente d'ordre n)
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $M^{n-1}X_0 \neq 0$.
   (b) Montrer que $(X_0, MX_0, M^2X_0, \cdots, M^{n-1}X_0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
   (c) Montrer que M est semblable à J.

Exercice 13. *Réduction dans une base*

Soient E un K espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ non injectif.
Montrer que $\ker u \oplus \Im u = E$ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad A \in \mathrm{GL}_r(K).$$

Exercice 14. *Matrice de carré nul*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement si A est semblable à

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad 2r \leq n.$$

Exercice 15. *Noyau ou image plus ou moins figés*

Soient E et F deux K espaces vectoriels de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de W.

1. Soit $\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E,F),\ V \subset \ker u\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. Déterminer sa dimension.
2. Soit $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{L}(E,F),\ \Im u \subset W\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et préciser sa dimension.

Exercice 16. *Dimension*

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Déterminer la dimension de :

$$\{g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0\}.$$