Programme des colles du 29/04 au 03/05

1. Espaces vectoriels.
   - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
   - Famille libre, famille liée.
   - Bases et coordonnées.
   - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   - Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   - Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.
   - Sous-espaces supplémentaires.
   - Espaces de dimension finie, existence de bases : théorème de la base incomplète.
   - Toute famille de $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
   - Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
   - Rang d'une famille de vecteurs.
   - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   - Dimension d'une somme directe de deux s.e.v. de dimensions finies.
   - Formule de Grassmann.
   - Supplémentaires d'un sous-espace : existence, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
2. Applications linéaires.
   - Définition de la linéarité, exemples.
   - Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   - Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
   - Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
   - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   - Applications linéaires de rang fini.
   - Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   - **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.**
     Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$ (**La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours de maths, s'ils l'acceptent**)
   - **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
   - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   - Espaces de dimension finie isomorphes.
   - **Théorème du rang :**
     - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et que S est un supplémentaire de Ker u, alors $u_{|S}^{|\mathbf{Im}\ u}$ est un isomorphisme.**
     - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\text{rg } (u) + \dim \text{ (Ker } u) = \dim \ (E).$$

3. Matrices d'applications linéaires.
   - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
   - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   - Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.
   - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
   - Matrice d'une composée.
   - Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
   - Théorème du rang pour une matrice.
   - Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.