Dénombrement

Exercice 1. *Cardinal de la différence symétrique*
Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Si E est un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A\Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A\cap B.$$

Exercice 2. *Dénombrement d'un ensemble de parties*
Soit E un ensemble à n éléments, et $A\subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 3. *Anagrammes*
Deux mots sont des anagrammes s'ils sont formés avec les mêmes lettres apparaissant chacune le même nombre de fois dans chacun d'eux. Par exemple, JEUNE et ENJEU sont des anagrammes. Déterminer combien les mots STYLOGRAPHIQUE, JEUNE et TRANSISTORISASSIONS ont d'anagrammes (il s'agit d'un exercice de mathématiques, on considère tous les mots que l'on peut former, qu'ils aient un sens ou non).

Exercice 4. *Poker*
On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes. Précisément, notant $E = C\times H$ où $C = \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit\}$ est l'ensemble des couleurs, et $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,V,D,R\}$ l'ensemble des hauteurs, on s'intéresse aux parties $A\in\mathcal{P}(E)$ telles ques Card $(A) = 5$.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
3. Dénombrer maintenant le nombre de mains réalisant les différentes combinaisons du poker :
   (a) La quinte flush : une main de 5 cartes consécutives de la même couleur sachant que le 1 peut participer à deux suites $1,2,3,4,5$ et $10,V,D,R,1$.
   (b) Le carré : une main dans laquelle on dispose de 4 cartes de la même hauteur.
   (c) Le full : une main avec 2 cartes d'une même hauteur, et 3 autres cartes d'une même hauteur.
   (d) La couleur : une main de 5 cartes de la même couleur qui n'est pas une quinte flush.
   (e) La suite : une main de 5 cartes consécutives qui n'est pas une quinte flush.
   (f) Le brelan : une main comprenant trois cartes de la même hauteur, sans full ni carré.
   (g) La double paire : c'est une main avec deux paires de cartes de même hauteur sans full.
   (h) La paire : c'est une main avec une seule paire de cartes de la même hauteur.

Exercice 5. *Podium !*
Une course oppose 20 concurrents.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un livre. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles.

Exercice 6. *Ranger des livres*
On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Indications :

1. Choisir l'ordre des groupes, puis l'ordre des livres à l'intérieur de chacun des groupes.
2. Choisir la position du groupe des livres de mathématiques, puis ranger les livres de mathématiques d'un côté, le reste des livres de l'autre.

Exercice 7. *Nombres et chiffres*
Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. A.
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
3. A_2, ensemble des nombres pairs de A.
4. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Indications : Il faut mettre à part le premier chiffre (différent de 0), puis

1. Décrire les éléments de A en terme de $7 - liste$.
2. Décrire les éléments de A_1 en terme d'arrangements.
3. Séparer le traitement du chiffre des unités et le traitement des chiffres précédents.
4. Combien y-a-t-il de façons de choisir 7 chiffres distincts parmi 9 ?

Exercice 8. *Des tours sur un échiquier*
De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre.
Indication : Commencer par choisir les lignes où sont les tours.

Exercice 9. *Le problème des anniversaires*
Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ? Indication : traduire le problème en terme d'application injective (ou plutôt non injective...).

Exercice 10. *Grilles de Fleissner*
Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

1. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?
2. Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

Indications :

1. On a 36 choix pour le premier trou. Et combien pour le second ?
2. Il faut effectuer $n^2/4$ trous...

Exercice 11. *Parties de cardinal pair*
Soit E un ensemble, $a \in E$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est non vide, fini, et Card $(E) = n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.
   Montrer que Card $(\mathcal{P}_0(E)) =$ Card $(\mathcal{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 12. *Interprétation ensembliste d'une formule avec le binôme*
Montrer que, pour $n \geq 1$, on a :
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$
Indication :On pourra compter le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments en coupant d'abord le gros ensemble en deux parties égales.