Programme des colles du 13/05 au 17/05

1. Applications linéaires.
   - Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
   - Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
   - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   - Applications linéaires de rang fini.
   - Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   - Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.
     Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$
   - Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E
   - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   - Espaces de dimension finie isomorphes.
   - **Théorème du rang :**
     - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de Ker u, alors $u_{|S}^{|\mathrm{Im}\, u}$ est un isomorphisme.**
     - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\mathrm{rg}\ (u) + \dim\ (\mathrm{Ker}\ u) = \dim\ (E).$$

2. Matrices d'applications linéaires.
   - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
   - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   - Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
   - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
   - Matrice d'une composée.
   - Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
   - Théorème du rang pour une matrice.
   - Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.
   - Matrice de passage d'une base à une autre.
   - **Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.**
   - Matrices semblables.
   - Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.
   - Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.
   - Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.
3. Dénombrement
   - Cardinal d'un ensemble fini. Notations $|A|$, Card(A).
   - Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
   - Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles finis, on a :
     - si f injective, $|E| \leq |F|$,
     - si f surjective, $|E| \geq |F|$,
     - si f bijective, $|E| = |F|$.

     En cas d'égalité des cardinaux de E et F, équivalence entre injectivité et surjectivité.
   - p-uplets et cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
   - Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
   - Nombre d'arrangements (ou p-uplets d'éléments distincts) d'un ensemble fini, nombre d'applications injectives entre ensembles finis.
   - Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.
   - **Justifications combinatoires de la formule de Pascal et du binôme de Newton.**