Corrigé du devoir surveillé du concours blanc

1 Une équation dans l'espace des polynômes complexes

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ solution de l'équation :

$$(E) \;\; P(X^2-1) = P(X+1)P(X-1).$$

Le polynôme $P=0$ est une solution évidente du problème, on suppose dans toute cette partie que le polynôme $P \neq 0$ est une solution de (E).

1. Un polynôme constant non nul vérifiant (E) est de la forme $P = c \in \mathbb{C}^*$ et vérifie $c = c^2$ donc $c = 1$. L'unique polynôme constant non nul solution est $P = 1$.
2. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n.$$

   (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.
   Pour $n = 0$, cette relation est vraie puisqu'elle signifie $a_0 + 1 = (a_0+1)^1$.
   Prouvons l'hérédité : on suppose que $a_n = (a_0+1)^{2^n} - 1$. Par définition de notre suite, on a alors :

$$a_{n+1} = \left[(a_0+1)^{2^n} - 1\right]^2 + 2\left[(a_0+1)^{2^n} - 1\right].$$

$$a_{n+1} = (a_0+1)^{2^{n+1}} + 1 - 2(a_0+1)^{2^n} + 2(a_0+1)^{2^n} - 2.$$

$$a_{n+1} = (a_0+1)^{2^{n+1}} - 1.$$

   On en déduit que la relation $a_{n+1} + 1 = (a_0+1)^{2^{n+1}}$ est vérifiée, donc la propriété est héréditaire.
   Ainsi, le principe de récurrence permet de conclure.

   (b) Si a_0 est un réel strictement positif, alors $(a_0+1) > 1$ donc la suite de terme général $(a_0+1)^{2^n}$ est croissante. Puisque $a_n = (a_0+1)^{2^n} - 1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels.
3. Si a est une racine de P, on peut remplacer X dans l'équation (E) par $a+1$ et l'on en déduit que $P\left((a+1)^2-1\right) = P(a+2)P(a) = 0$ donc $(a+1)^2 - 1$ est aussi racine de P. On peut également remplacer X par $a-1$ et obtenir alors que $P\left((a-1)^2-1\right) = P(a)P(a-1) = 0$, donc que $(a-1)^2 - 1$ est aussi racine de P.
4. On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes qui satisfait la relation (R) et que a_0 est racine de P.

   (a) On remarque que $(a+1)^2 - 1 = a^2 + 2a$ donc d'après le raisonnement précédent, si a est racine de P, $a^2 + 2a$ est aussi racine de P. Par récurrence, il est alors aisé de prouver que si a_0 est racine de P, il en est de même de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Un polynôme non nul admet un nombre fini de racines distinctes (ce nombre étant inférieur ou égal à son degré). Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constituée de nombres tous différents puisque ce sont des racines de P. On en déduit qu'il existe n et m dans $\mathbb{N}$ tels que $m < n$ et $a_m = a_n$, i.e. tels que $(a_0+1)^{2^m} = (a_0+1)^{2^n}$.
   Si $a_0 \neq -1$, on peut simplifier par $(a_0+1)^{2^m}$ pour obtenir $(a_0+1)^{2^n - 2^m} = 1$, d'où l'on déduit que (a_0+1) est une racine $(2^n - 2^m)$-ième de l'unité donc $|a_0 + 1| = 1$.

(c) On suppose par l'absurde que P admet pour racine un nombre a_0 strictement positif. Mais alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à partir de cette première valeur et de la relation (R) est strictement croissante et constituée de racines de P. Comme P est non nul, il ne peut avoir ainsi une infinité de racines : on obtient une contradiction, d'où l'on déduit que P n'admet aucune racine réelle strictement positive.

(d) Par l'absurde, supposons que -1 est racine de P. Alors d'après la question 3, on a aussi $(-1-1)^2-1=3$ qui est racine de P, ce qui fournit la contradiction désirée puisque P n'a pas de racine strictement positive d'après la question précédente.

5. Si a est racine de P, on sait grâce à la question précédente que $a \neq -1$. Ainsi, la question $4(b)$ nous garantit que $|a+1|=1$. On montrerait de même que $|a-1|=1$. Donc si P a une racine, cette racine a vérifie $|a+1|=|a-1|=1$: le point d'affixe a est donc sur les deux cercles de centres d'affixe -1 et 1, de rayon 1, qui sont tangents en leur unique point d'intersection qui a pour affixe 0. Ainsi, $a=0$.

6. Si P est une solution de (E), comme P a pour unique racine complexe 0, on a nécessairement $P=\lambda X^n$ où $\lambda\in\mathbb{C}$ puisque tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

   Réciproquement, si $P=\lambda X^n$, alors P est solution de (E) si et seulement si :

$$\lambda(X^2-1)^n = \lambda(X+1)^n\lambda(X-1)^n$$

$$\lambda(X^2-1)^n = \lambda^2(X^2-1)^n$$

   donc si et seulement si $\lambda=0$ ou $\lambda=1$. Finalement, les seules solutions sont le polynôme nul et les polynômes $P_n=X^n$ où $n\in\mathbb{N}$.

2 Matrices et applications linéaires

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commmutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation $M\ {}^tM = {}^tMM$ (1).
Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire que M vérifie la relation (1).

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On calcule : ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A\ {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad {}^tCC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C\ {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc A et C vérifient la relation (1).
2. $A^2 = I_2$, donc les puissances de A sont faciles à décrire : on démontre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^{2n} = I_2$ et $A^{2n+1} = A$. Ainsi, puisque I_2 et A vérifient (1), c'est aussi le cas de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. A est inversible puisque $A^2 = I_2$, et son inverse est $A^{-1} = A$.
Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A.
4. On a $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = \vec{i}$.
$u \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $A^2 = I_2$ donc $u \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$ et u est une symétrie. L'ensemble de ses vecteurs invariants est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$.
Il s'agit donc du sous espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dans la suite, on notera $U = A + I$.
5. On vérifie par le calcul que ${}^tUU = U\ {}^tU = U^2 = 2U$, donc la matrice U vérifie la relation (1).
Montrons par récurrence (forte) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.
La relation est vérifiée aux rangs $n = 1$ et $n = 2$.
Supposons que $n \geq 2$, et que la relation est vérifiée au rang n. Comme $U^2 = 2U$, on a :
$$U^{n+1} = U^{n-1}U^2 = U^{n-1}2U = 2U^n = 2^nU.$$
La relation est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc ${}^tU^nU^n = 2^{n-1}\ {}^tU2^{n-1}U = 2^{2n-2}\ {}^tUU = 2^{2n-2}U\ {}^tU = 2^{n-1}U2^{n-1}\ {}^tU = U^n\ {}^tU^n$, et U^n vérifie (1) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).
6. Calculons les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée :
$(A + C)\ {}^t(A + C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^t(A + C)(A + C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel puisque $A \in E_2$, $C \in E_2$ et $A + C \notin E_2$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $M\ {}^tM = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$ et $M\ {}^tM = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$, donc $M \in E_2$ si et seulement si le système d'équations suivant est vérifié :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} ab + cd & = & ac + bd \\ a^2 + b^2 & = & c^2 + d^2 \\ c^2 + d^2 & = & b^2 + d^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (b - c)(b + c) & = & 0 \\ (b - c)(a - d) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ceci est vérifié dans deux cas et deux cas seulement : si $b = c$, ou bien si $b = -c$ et que $a = d$.
Les deux formes possibles des matrices de E_2 sont $\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$.

8. E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels, admettant respectivement pour bases $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
9. Etant données M et N deux matrices de E_2, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple, on constate que $MN = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin E_2$ donc le produit de deux matrices de E_2 n'est pas nécessairement dans E_2.

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = Mat_{B'}(h)$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3.

10. Représentons la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. Calculons $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tSS = S\,{}^tS = I_3$ et ${}^tS^2S^2 = S^2\,{}^tS^2 = I_3$ donc S et S^2 sont dans E_3.
12. Calculons, pour trois réels a, b et c, avec $R = aI_3 + bS + cS^2$:

$$ {}^tRR = (aI_3 + b\,{}^tS + c\,{}^tS^2)(aI_3 + bS + cS^2) $$
$$ {}^tRR = a^2I_3 + abS + acS^2 + ba\,{}^tS + b^2I_3 + bcS + ca\,{}^tS^2 + cb\,{}^tS + c^2I_3 $$
$$ {}^tRR = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2) $$

$$ R\,{}^tR = (aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + b\,{}^tS + c\,{}^tS^2) $$
$$ R\,{}^tR = a^2I_3 + ab\,{}^tS + ac\,{}^tS^2 + baS + b^2I_3 + bc\,{}^tS + caS^2 + cbS + c^2I_3 $$
$$ R\,{}^tR = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2) $$

On a donc : $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, aI_3 + bS + cS^2 \in E_3$.
13. E_3 contient donc $F = \mathrm{Vect}(I_3, S, S^2)$. Les matrices I_3, S et S^2 forment une famille libre, donc ce sous-espace est de dimension 3.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle :
Soient $R_1 = a_1I_3 + b_1S + c_1S^2$ et $R_2 = a_2I_3 + b_2S + c_2S^2$ deux éléments de F, on a alors

$$ R_1R_2 = a_1a_2I_3 + a_1b_2S + a_1c_2S^2 + b_1a_2S + b_1b_2S^2 + b_1c_2S^3 + c_1a_2S^2 + c_1b_2S^3 + c_1c_2S^4 $$

Or $S^3 = -I_3$ donc $S^4 = -S$ et l'on peut simplifier :

$$ R_1R_2 = (a_1a_2 - b_1c_2 - b_2c_1)I_3 + (a_1b_2 + a_2b_1 - c_1c_2)S + (a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2)S^2 $$

Donc $R_1R_2 \in F$ et F est bien stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note
$B'' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.

L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4.

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.
Calculons :

$$^tBB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B\ {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ligne 1 colonne 2 du résultat, on voit qu'une condition nécessaire pour avoir $B \in E_4$ est que $a + 1 = 0$ donc $a = -1$. Réciproquement, si $a = -1$, on observe que $B \in E_4$. Dans toute la suite, on pose $a = -1$.

16. Calculons Ker $(u) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{rcl} x - y + z + t & = & 0 \\ -x + t & = & 0 \\ x - t & = & 0 \\ x + y - z + t & = & 0 \end{array} \right\}$
A l'aide du pivot de Gauss, on obtient un système équivalent avec trois équations $x = 0$, $y = z$ et $t = 0$.
Ainsi, Ker $(u) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
D'après le théorème du rang, Im (u) est donc de dimension 3.
Or Im (u) est l'espace engendré par les colonnes de B dans $\mathbb{R}^4$. Comme la troisième colonne est l'opposée de la deuxième, Im (u) est engendré par la famille des colonnes n°1, 2 et 4 de B : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Cette famille est une base de Im (u) puisqu'elle est génératrice de cardinal 3.

17. Calculons $u(\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4}) = -2\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} + 2\vec{e_4}$. En notant $v = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4}$, on a donc $u(v) = -2v$.

18. Calculonsr $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pour ces deux vecteurs, l'image par u est égale à leur double.

19. On note $C = (\vec{e_2}+\vec{e_3}, \vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}-\vec{e_4}, \vec{e_1}+\vec{e_4}, \vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}-\vec{e_4})$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

    On déduit des questions précédentes $Mat_C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    En notant $P = Mat_{B''}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base B'' à la base C, on a $B = PMat_C(u)P^{-1}$, où $Mat_C(u)$ est une matrice diagonale.

20. On prouve par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = PMat_C(u)^n P^{-1}$.
    Ceci est vrai au rang 1.
    Supposons que c'est vrai au rang n, on a alors

    $$B^{n+1} = B^n B = PMat_C(u)^n P^{-1} PMat_C(u)P^{-1} = PMat_C(u)^n Mat_C(u)P^{-1} = PMat_C(u)^{n+1}P^{-1}$$

    et la propriété est héréditaire.
    On remarque enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Mat_C(u)^{n+2} = 4Mat_C(u)^n$ et l'on en déduit aisément que $B^{n+2} = 4B^n$. Ainsi, on montre par récurrence sur l'entier naturel p que $B^{2p} = 4^{p-1}B^2$ et $B^{2p+1} = 4^p B$.