Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Grilles de Fleissner*

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais.

1. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?

   On a 36=4*9 choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc 32=4*8 choix pour placer le second trou. On a ensuite 4*7 choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusque 4 choix pour placer le 9ème trou. Mais attention ! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit 9 ! Finalement, le nombre de grilles possibles est

   $$\frac{4 \times 9 \times 4 \times 8 \times 4 \times 7 \times \cdots \times 4 \times 1}{9!} = 4^9.$$

2. Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

   Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $n^2/4$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4). Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2 = 4 \times \frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2 - 4 = 4 \times \left(\frac{n^2}{4} - 1\right)$ choix pour le deuxième carré et ainsi de suite. En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{n^2/4}$.

Exercice 2. *Dominos*

Un jeu de dominos est constitué de pièces rectangulaires : chaque domino est découpé en deux carrés dans chacun lesquels on peut avoir entre 1 et 6 points noirs dessinés.

1. Combien y a-t-il de dominos différents possibles ? On a $\binom{6}{2} = 15$ dominos possibles avec des nombres différents sur chaque moitié, et 6 dominos doubles donc un total de 21 dominos avec cette règle.

2. On considère un jeu de dominos constitué de tous les dominos différents que l'on peut envisager. On tire deux dominos parmi le jeu (l'ordre de tirage ne compte pas).

   Combien y a-t-il de tirages possibles ?

   Il y a donc $\binom{21}{2} = 210$ possibilités puisqu'il s'agit de choisir deux éléments distincts d'un ensemble qui en comporte 21.

   Combien de tirages y a-t-il où les deux dominos ont au moins un numéro en commun ?

Il est plus facile de compter les tirages avec aucun numéro commun : il s'agit de choisir les 4 numéros, soit $\binom{6}{4} = 15$ possibilités, puis de choisir avec lequel des 3 autres un numéro donné est associé en un domino. On peut alors compter les tirages avec un domino double et un normal sans que le double n'apparaisse sur le normal : on a exactement 6 possibilités pour le double, puis $\binom{5}{2} = 10$ pour le domino normal soit 60 tels tirages. Enfin, on peut tirer deux doubles : il y a $\binom{6}{2} = 15$ tels tirages. Ainsi, 120 tirages sont sans numéro commun, donc pour $210 - 120 = 90$ tirages de deux dominos, les deux dominos présentent un même nombre de points.

Exercice 3. *Points du plan*

On considère n points dans le plan, on les relie deux à deux par des arêtes rouges ou bleues.

1. De combien de façons peut-on colorier les arêtes ?

   Le nombre d'arêtes est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On a donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ coloriages possibles.

2. Pour $n \geq 4$, montrer que de tout point sont issues au moins deux arêtes de la même couleur.

   Si $n \geq 4$, de tout sommet partent au moins trois arêtes. S'il y en a moins de deux qui sont bleues, il y en a donc au moins deux rouges partant de ce sommet.

3. Question facultative : pour $n \geq 6$, montrer que l'on peut trouver un triangle unicolore. Faisons le avec 6 points.

   On choisit un point A donné parmi les 6, il est relié au 5 autres donc parmi ces 5, il y en a au moins 3, B, C et D qui sont reliés à A par une arête d'une même couleur, disons rouge pour simplifier. Si le triangle BCD est entièrement bleu, notre problème est résolu, et sinon, il a une arête rouge qui forme avec A un triangle rouge.

   Si $n > 6$, il suffit d'appliquer ce raisonnement avec seulement 6 des n points pour prouver l'existence d'un triangle unicolore.