Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Lancer de trois dés*

On lance trois dés équilibrés. On choisit donc $\Omega = [\![1,6]\!]^3$ comme univers de notre expérience aléatoire, muni de la loi uniforme. On a donc $\text{Card}(\Omega) = 6^3 = 216$.
Calculons alors la probabilité des événements suivants :

1. A : « avoir trois numéros deux à deux distincts».
   On dénombre les issues réalisant A : $\text{Card}(A) = 6 \times 5 \times 4$ (6 possibilités pour le 1er dé, puis 5 restantes pour le 2ème et 4 pour le dernier) donc $P(A) = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \dfrac{5}{9}$.
2. B : « avoir trois numéros de la même parité».
   On dénombre les issues réalisant B : $\text{Card}(B) = 6 \times 3 \times 3$
   (6 possibilités pour le 1er dé, puis seulement 3 restantes pour les deux suivants qui doivent être de la même parité que le premier)
   donc $P(A) = \dfrac{6 \times 3 \times 3}{6^3} = \dfrac{1}{4}$.
3. C : « avoir un des numéros strictement supérieur à la somme des deux autres».
   Pour dénombrer les issues réalisant C, on écrit les issues possibles avec les numéros dans l'ordre décroissant : $(6,4,1)$, $(6,3,2)$, $(6,3,1)$, $(6,2,2)$, $(6,2,1)$, $(6,1,1)$, $(5,3,1)$, $(5,2,2)$, $(5,2,1)$, $(5,1,1)$, $(4,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$. On a 7 groupes d'issues avec 3 nombres différents, et 6 groupes avec un double, soit en tenant compte de l'ordre des dés $7 \times 3! + 6 \times 3 = 60$ issues donc $P(C) = \dfrac{60}{6^3} = \dfrac{5}{18}$.
4. D : « le numéro donné par le 1 er dé est strictement inférieur au numéro donné par le 2 ieme dé qui est lui même strictement inférieur au numéro donné par le 3 ieme dé».
   Ici, il suffit de choisir les trois numéros parmi les nombres de 1 à 6 donc on a $\text{Card}(D) = \binom{6}{3} = 20$ et $P(D) = \dfrac{20}{216} = \dfrac{5}{54}$.
5. E : « La somme des numéro donnés par les deux premiers dés vaut 7».
   Ici enfin, on a 6 possibilités pour les deux premiers dés, et 6 possibilités pour le dernier donc une probabilité $P(E) = \dfrac{6^2}{6^3} = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 2. *Test de dépistage*

Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique propose son nouveau test de dépistage :

— si une personne est malade, le test est positif à 99% ;
— si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1\%$.

Déterminer la probabilité qu'une personne pour qui le test est positif soit malade.
Comme dans le cours, on traduit l'énoncé à l'aide de deux évènements :

— M est l'évènement « l'individu est malade »,
— D l'évènement « l'individu est détecté positif ».

L'énoncé nous indique $P(M)=\dfrac{1}{10000}$ donc $P(\overline{M})=\dfrac{9999}{10000}$, $P(D|M)=\dfrac{99}{100}$, et $P(D|\overline{M})=\dfrac{1}{1000}$.
La formule des probabilités totales permet alors de calculer $P(D)=P(M)P(D|M)+P(\overline{M})P(D|\overline{M})$.
La formule Bayes nous donne enfin $P(M|D)=\dfrac{P(D|M)P(M)}{P(D)}=\dfrac{P(D|M)P(M)}{P(M)P(D|M)+P(\overline{M})P(D|\overline{M})}$.
Application numérique : $P(M|D)\approx 0,09$ donc cette probabilité est de l'ordre de 9%.

Exercice 3. *Tir*

Deux tireurs A et B tirent indépendamment une fois au but chacun. La probabilité d'atteindre le but par le tireur A est égale à 0.8 et elle est de 0.4 pour le tireur B.

1. Ils ont tiré tous les deux, calculer la probabilité que le but soit atteint exactement une fois.
   Notons E l'évènement « A atteint la cible »et F l'évènement « B atteint la cible ».
   $\overline{E}\cap F$ et $\overline{F}\cap E$ sont incompatibles, donc on a $P\left((\overline{E}\cap F)\cup(\overline{F}\cap E)\right)=P(\overline{E}\cap F)+P(\overline{F}\cap E)$.
   Enfin, par indépendance de E et F, on a aussi indépendance de E et $\overline{F}$ ou de F et $\overline{E}$ donc finalement $P\left((\overline{E}\cap F)\cup(\overline{F}\cap E)\right)=P(\overline{E})P(F)+P(\overline{F})P(E)=0,2\times 0,4+0,8\times 0,6=0,56$
2. Ils ont tiré tous les deux et on constate que le but est atteint exactement une fois.
   (a) Trouver la probabilité que le but ait été atteint par le tireur A.
   On veut calculer $P\left(E|(\overline{E}\cap F)\cup(\overline{F}\cap E)\right)=\dfrac{P\left(E\cap\overline{F}\right)}{P\left((\overline{E}\cap F)\cup(\overline{F}\cap E)\right)}=\dfrac{P(E)P(\overline{F})}{0,56}$.
   On trouve donc $\dfrac{0,48}{0,56}=\frac{6}{7}$
   (b) Trouver la probabilité que le but ait été atteint par le tireur B.
   Quand on calcule les probabilités sachant que le but est atteint une fois, on a bien une loi de probabilités donc deux évènements contraires comme celui de la question précédente et de celle-ci ont des probabilités de somme 1. Ainsi, la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{7}$.