Probabilités

Exercice 1. *Écriture ensembliste*
Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de A. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent ;

Exercice 2. *Racines de polynômes*
On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

— Q ait deux racines réelles distinctes.
— Q ait une racine réelle double.
— Q n'ait pas de racines réelles.

Exercice 3. *Probabilités composées*
On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 4. *CD-Rom*
Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
— 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : ≪ la boite est abimée ≫et par D l'événement ≪ la boite achetée contient au moins une disquette défectueuse ≫.

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée.

Exercice 5. *La rumeur*
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. *QCM*
Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 7. *Application des probabilités à la médecine*

1. On dispose d'un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint $0,5\%$ de la population. Sur 99% des malades, le test réagit (c'est à dire que 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des individus sains, le test montre une fausse réaction positive. Un patient fait un test qui revient positif. Quel est la probabilité qu'il soit malade ?
2. Pour détecter un éventuel cancer du sein, des femmes à partir de 50 ans font une mammographie. On sait que 1% des femmes à cet âge sont atteintes par un cancer. La détection d'un cancer sur le mammogramme fonctionne dans 9 cas sur 10 si la personne testée est atteinte. Le taux fausse détection (c'est à dire la proportion des femmes saines pour lesquelles un cancer est détecté) est de 9%. Une femme vient de réaliser une mammographie positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte par un cancer ?
3. Cancer du colon : le taux de ce cancer à l'âge de 50 ans est de $0,3\%$. Le médecin propose un test de détection de sang dans les selles. Pour 50% des personnes qui souffrent d'un cancer de l'intestin, ce test est positif. Les détections parmi les individus sains ont une probabilité de $0,3\%$. Quel est la probabilité de souffrir d'un cancer sachant que le test a été positif ?
4. SIDA : Le test double standard (ELIZA et Western-Blot) détecte dans $99,9\%$ des cas le virus VIH et le taux de faux-positifs est de $0,01\%$. Une personne sans facteurs de risque particuliers appartient à un groupe dans lequel seulement $0,01\%$ des individus porte le virus VIH. Son test et positif. Quel est la probabilité que cet individu soit porteur de VIH ?

Exercice 8. *Pièce truquée*

On dispose de trois pièces de monnaie. Deux d'entre elles sont équilibrées et la troisième est truquée : en la lançant, vous avez trois fois plus de chances d'obtenir « Face »que « Pile ». Malheureusement, ces trois pièces ne sont pas reconnaissables.

1. Vous choisissez au hasard une pièce et vous la lancez une fois.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir « Face » ?
   (b) Si vous obtenez « Face », quelle est la probabilité que vous ayez la pièce truquée ?
2. Vous choisissez toujours au hasard une pièce, mais vous la lancez n fois de suite. On suppose les lancers indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir n fois « Face » ?
   (b) Si vous obtenez n fois « Face », quelle est la probabilité p_n que vous ayez choisi la pièce truquée ? Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.
   (c) A partir de quelle valeur de n serez-vous « sûr »à 95% d'avoir choisi la pièce truquée ?

Exercice 9. *Football*

On organise un tirage au sort entre n équipes de basket-ball de 1ère division et n équipes de 2ième division (chaque équipe joue un match, et un seul).

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.
2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Indépendance d'évènements

Exercice 10. *Circuit électrique*

1. Soient $A,\ B,\ C$ trois événements. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques $C_1,\ C_2$ et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   (a) si les composants sont disposés en série.
   (b) si les composants sont disposés en parallèle.
   (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 11. *Indépendance et contexte*

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

$$A = \text{“tirage d'un nombre pair”},$$

$$B = \text{“tirage d'un multiple de 3”}.$$

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 12. *Avion*

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 13. *Probabilités et divisibilité*

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout $m \leq n$ qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B.

Variables aléatoires

Exercice 14. *Loi d'un dé truqué*

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 15. *Garagiste*

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \; P(X = 1) = 0,3 \; P(X = 2) = 0,4 \; P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Y sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 16. *Vaches laitières*

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée).

Exercice 17. *Service de dépannage*

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

Variables aléatoires avec des calculs de variance

Exercice 18. *Les boules*

1. Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches. Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
   Si il tire une boule blanche il gagne 2 points, dans le cas contraire il perd 3 points.
   Soit X le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.
   (a) Dresser le tableau définissant la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Le joueur tire 5 boules simultanément, les 10 boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10.
   (a) Soit Y le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de Y et son espérance.
   (b) Soit T le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de T et son espérance.
   (c) Après ce premier tirage le joueur remet les boules noires obtenues et effectue un nouveau tirage simultané de 5 boules. On appelle Z le nombre de boules blanches obtenues lors de ce second tirage. Déterminer la loi de Z.

Exercice 19. *Variance de la loi uniforme*

1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Rappeler son espérance, déterminer $E(X^2)$ puis calculer $V(X)$. On pourra s'aider de la formule :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme finie avec n points dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
   (a) Déterminer a et b de sorte que la loi de Y soit la même que celle de $aX + b$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 20. *Big balls*

On considère dans tout cet exercice une urne contenant au départ N boules indiscernables, parmi lesquelles r boules blanches et $N - r$ boules noires. On tire successivement au hasard toutes les boules jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus aucune dans l'urne. On note X le rang de la dernière boule blanche sortie de l'urne.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi et l'espérance de X. On calculera également la variance dans des cas simples.

1. Dans les cas particuliers suivants, déterminer l'espérance et la variance de X :
   (a) Si $N = 4$ et $r = 1$;
   (b) Si $N = 4$ et $r = 2$.
2. Si $r = 1$, reconnaître la loi de X, préciser son espérance et calculer sa variance (Indication : exercice précédent).
3. On étudie dans cette question le cas général où $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X.
   (b) Déterminer la probabilité d'un tirage donné $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, où $\forall i \in [\![1, N]\!],\ x_i \in \{Noir, Blanc\}$ et $\mathrm{Card}(\{i \in [\![1, N]\!] \mid x_i = Blanc\}) = r$.
   (c) Soit $k \in [\![r, N]\!]$. Déterminer la probabilité que, parmi les $(k-1)$ premiers tirages, on ait exactement $r - 1$ boules blanches, et en déduire la probabilité $P(X = k)$.
   (d) Montrer que $P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$, et calculer alors $\sum\limits_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}$ puis $\sum\limits_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$
   (e) Montrer enfin que $E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

Couples ou familles de variables aléatoires

Exercice 21. *Une variable et son carré*

1. Soit X une variable aléatoire, suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$.
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (b) En déduire la loi de Y.
   (c) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.
   (d) X et Y sont-elles indépendantes ?
   (e) Déterminer la loi de X sachant$(Y = 1)$, puis sachant $(Y = 0)$.
2. Mêmes questions avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Exercice 22. *Lois marginales*
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. *Somme et produit*
On considère deux variables X_1 et X_2, indépendantes et de même loi, avec :

$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

On note alors S et P les variables aléatoires définies par $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 X_2$.

1. Déterminer la loi du couple (S, P), et les lois marginales de S et de P.
2. S et P sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$ et $V(P)$.

Exercice 24. *Libération des variables aléatoires*
On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires indépendantes dont la loi conjointe est donnée par :

X \ Y	0	1	2
0	a	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	b	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

,

1. A l'aide de l'indépendance de X et Y, déterminer les valeurs des nombres a et b.
2. Quelles sont-alors les lois conditionelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

Exercice 25. *Indépendance et proportionnalité*
Montrer que deux variables aléatoires X et Y sur un univers fini sont indépendantes si et seulement si les lignes du tableau décrivant la loi du couple (X, Y) sont deux à deux proportionnelles.