Devoir à la maison

Exercice 1. *Test médical*

Des études montrent que 10% des individus souffrent d'une maladie donnée. Un test est utilisé pour diagnostiquer cette maladie. On a établi statistiquement que la probabilité pour qu'un malade soit positif au test est $\frac{9}{10}$ et que la probabilité pour qu'un individu sain soit négatif au test est $\frac{19}{20}$.
On pourra noter M l'évènement ≪ le patient est malade ≫et P l'évènement ≪ le patient est positif au test ≫.

1. On choisit un patient au hasard. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   (a) E_1 : ≪ le patient est malade et positif au test ≫ ;
   (b) E_2 : ≪ le patient n'est pas malade et négatif au test ≫ ;
   (c) E_3 : ≪ le patient bien que positif au test n'est pas malade ≫ ;
   (d) E_4 : ≪ le patient est positif au test ≫.
2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne positive au test soit malade ?
3. Parmi un échantillon de 6 patients choisis au hasard et de façon indépendante, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un patient malade ?

Exercice 2. *Couple de variables aléatoires.*

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :
— Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
— X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
— Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.
Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance. On rappellera la démonstration de la formule de la variance d'une telle variable aléatoire.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   — si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $P(X = k, Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P(X = k, Z = n) = 0$.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$, on a :
$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y (sans calcul) ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
   Déterminer la loi du couple (X, Y).