Déterminants

Exercice 1. *Manipulation lignes*

Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Exercice 2. *Déterminant trigonométrique*

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. *Déterminants* 3×3 *et* 4×4

Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. *Déterminant de la transposée*

Soit $A\in\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

Exercice 5. *Déterminants de taille* n

1. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}$:
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer :
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Calculer :
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

   Ind. Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.

Exercice 6. *Fonction affine*

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \ldots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \ldots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. *Déterminant de Vandermonde*

Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \ldots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & {a_3}^2 & \cdots & {a_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & {a_3}^{n-1} & \ldots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

Ind. Procéder par récurrence sur n en remplaçant la dernière colonne par ${}^t(1, X, \ldots, X^{n-1})$.

Exercice 8. *Déterminant circulant*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes, et $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.