Devoir à la maison

Exercice 1. *Test médical*

Des études montrent que 10% des individus souffrent d'une maladie donnée. Un test est utilisé pour diagnostiquer cette maladie. On a établi statistiquement que la probabilité pour qu'un malade soit positif au test est $\frac{9}{10}$ et que la probabilité pour qu'un individu sain soit négatif au test est $\frac{19}{20}$.
On pourra noter M l'évènement ≪ le patient est malade ≫et P l'évènement ≪ le patient est positif au test ≫.

1. On choisit un patient au hasard. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

   (a) E_1 : ≪ le patient est malade et positif au test ≫ ;
   $E_1 = M \cap P$. D'après la formule des probabilités composées, $P(E_1) = P(M)P_M(P) = \frac{9}{100}$.

   (b) E_2 : ≪ le patient n'est pas malade et négatif au test ≫ ;
   $E_2 = \overline{M} \cap \overline{P}$. D'après la formule des probabilités composées, $P(E_2) = P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{P}) = \frac{171}{200}$.

   (c) E_3 : ≪ le patient bien que positif au test n'est pas malade ≫ ;
   $E_3 = \overline{M} \cap P$. D'après la formule des probabilités composées, $P(E_3) = P(\overline{M})P_{\overline{M}}(P) = \frac{9}{200}$.

   (d) E_4 : ≪ le patient est positif au test ≫.
   $E_4 = E_1 \cup E_3$. E_1 et E_3 sont incompatibles, donc $P(E_4) = P(E_1) + P(E_3) = \frac{27}{200}$.

2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne positive au test soit malade ?
   Par définition des probabilités conditionnelles, on a :
   $$P_P(M) = \frac{P(E_1)}{P(E_4)} = \frac{2}{3}.$$

3. Parmi un échantillon de 6 patients choisis au hasard et de façon indépendante, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un patient malade ?
   Il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire : la probabilité qu'il n'y ait aucun patient malade est $\left(\frac{9}{10}\right)^6$ puisque les patients sont choisis de façon indépendante et que la probabilité que l'un ne soit pas malade est $\frac{9}{10}$. La probabilité qu'il y ait au moins un patient malade est donc $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^6$.

Exercice 2. *Couple de variables aléatoires.*

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :
- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
- X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
- Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance. On rappellera la démonstration de la formule de la variance d'une telle variable aléatoire.
   Le lancer du dé équilibré pour déterminer si c'est un 6 ou non qui apparaît se modélise par une épreuve de Bernoulli. Comme on reproduit N fois cette expérience, et puisque les lancers sont indépendants, on obtient donc une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{1}{6})$.

Son espérance vaut donc $E(Z) = \frac{N}{6}$ et sa variance $V(Z) = N\frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5N}{36}$.
Rappelons la preuve du calcul de la variance d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{B}(N,p)$. On a alors $Z(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et pour tout $k \in Z(\Omega)$, $P(Z = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ donc d'après le théorème de transfert :

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} k^2$$

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} k^2$$

Or, pour $k \in [\![1, N]\!]$, on calcule :

$$k\binom{N}{k} = \frac{k \times N!}{k!(N-k)!} = \frac{N \times (N-1)!}{(k-1)!(N-k)!} = N\binom{N-1}{k-1}$$

Ainsi, on obtient :

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{N} N\binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} k$$

On opère alors le changement d'indice $i = k - 1$:

$$E(Z^2) = N\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{N-1-i} (i+1)$$

$$E(Z^2) = Np\left(\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^{i} (1-p)^{N-1-i} i + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^{i} (1-p)^{N-1-i}\right)$$

On reconnaît dans la première des deux sommes l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(N-1,p)$ et dans la deuxième la somme des probabilités de toutes les valeurs possibles de cette loi donc :

$$E(Z^2) = Np\left((N-1)p + 1\right)$$

On en déduit, grâce à la formule $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$:

$$V(Z) = N^2p^2 - Np^2 + Np - N^2p^2 = Np(1-p)$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
   Si $Z = n$, cela signifie que l'on a lancé exactement n fois la pièce, la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est $\mathcal{B}(n,p)$.
   Ainsi, si $k \leq n$, $P_{Z=n}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et si $k > n$, $P_{Z=n}(X = k) = 0$.
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   — si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $P(X = k, Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$
   En effet, on a d'après la formule des probabilités composées

   $$P(X = k, Z = n) = P(Z = n)P_{Z=n}(X = k)$$

   et il suffit de multiplier $P(Z = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ par $P_{Z=n}(X = k)$ que l'on a calculé à la question précédente pour obtenir le résultat attendu.
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P(X = k, Z = n) = 0$.
   En effet, si $n > N$, l'événement $Z = n$ est impossible et si $k > n$, les événements $X = k$ et $Z = n$ sont incompatibles.

4. Calculer la probabilité $P(X=0)$.

Les événements $(Z=n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ forment un système complet donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=0)=\sum_{n=0}^{N} P(Z=n)P_{Z=n}(X=0)$$

$$P(X=0)=\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n(1-p)^{N-n}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$P(X=0)=\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}\left(\frac{5p}{6}\right)^n(1-p)^{N-n}$$

Sous cette forme, on reconnaît une formule du binôme de Newton :

$$P(X=0)=\left(\frac{5p}{6}+1-p\right)^N$$

$$P(X=0)=\left(1-\frac{p}{6}\right)^N$$

5. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k,n) tel que $0\le k\le n\le N$, on a :

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n}=\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$

On calcule d'abord :

$$A=\binom{n}{k}\binom{N}{n}$$

$$A=\frac{n!N!}{k!(n-k)!n!(N-n)!}$$

$$A=\frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

Puis :

$$B=\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

$$B=\frac{N!(N-k)!}{k!(N-k)!(n-k)!(N-n)!}$$

$$B=\frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

Et l'on constate que $A=B$.

En déduire la probabilité $P(X=k)$. A nouveau avec la formule des probabilités totales :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{N} P(Z=n,X=k)$$

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k \binom{N}{k}\sum_{n=k}^{N}\binom{N-k}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{6}{5}\right)^n(1-p)^{n-k}$$

On fait le changement d'indice $i=n-k$:

$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k \binom{N}{k}\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i+k}(1-p)^{i}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k \left(\frac{1}{5}\right)^{k}\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1-p}{5}\right)^{i}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k \left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(1+\frac{1-p}{5}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{p}{5}\right)^{k}\left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(\frac{6-p}{6}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N,\frac{p}{6})$: c'est bien le résultat que l'on a obtenu à la question précédente.

   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y (sans calcul) ? Puisque Y est définie de façon analogue à X, il suffit de remplacer p, la probabilité de Pile, par $q=1-p$, la probabilité de Face pour obtenir la loi de Y : Y suit une loi binomiale de paramètre $(N,\frac{1-p}{6})$

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

   On a : $P(X=0)=\left(1-\frac{p}{6}\right)^N$, $P(Y=0)=\left(1-\frac{1-p}{6}\right)^N$ donc :

$$P(X=0)P(Y=0)=\left(\left(1-\frac{p}{6}\right)\left(1-\frac{1-p}{6}\right)\right)^N.$$

$$P(X=0)P(Y=0)=\left(\frac{5}{6}-\frac{p(1-p)}{6^2}\right)^N.$$

   Or l'événement $(X=0,Y=0)$ est identique à $Z=0$ donc :

$$P(X=0,Y=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

   Ainsi, si $p\neq 0$ et $p\neq 1$, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Si $p=0$ ou $p=1$, l'une des deux variables aléatoires est une variable certaine (i.e. constante) égale à 0 donc les deux variables sont indépendantes.

   Déterminer la loi du couple (X,Y).

   On remarque que pour k, l des entiers naturels, l'événement $(X=k,Y=l)$ est identique à $(X=k,Z=k+l)$ donc on a si $k+l\leq N$:

$$P(X=k,Y=l)=\binom{k+l}{k}\binom{N}{k}+lp^k(1-p)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-l}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+l}.$$

   Si $k+l>n$, alors $P(X=k,Y=l)=0$.