Programme des colles du 10/06 au 14/06

1. Probabilités
   - Formule $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X et Y sont indépendantes.
   - Espérance d'une variable aléatoire constante, suivant la loi de Bernoulli, binomiale.
   - Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.
   - Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.
   - Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
   - **Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.**
   - Covariance de deux variables aléatoires. Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
   - Relation $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.
   - Variance d'une somme, cas de variables décorrélées. On retrouve la variance d'une variable binomiale.
   - Inégalité de Markov.
   - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminants.
   - Etant donnée une base $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ du $\mathbb{K}$-e.v. E, il existe une unique application $f : E^n \to \mathbb{K}$, notée $\det_e$ vérifiant que f est n-linéaire, f est alternée et $f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$.
   - Si $f : E \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, alors elle est un multiple de $\det_e$.
   - En dimension 2 et 3, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.
   - Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.
   - Caractérisation des bases à l'aide du déterminant.
   - Déterminant d'un endomorphisme.
   - Déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.
   - Déterminant de matrice.
   - Déterminant d'un produit, caractérisation des matrices inversibles et déterminant de l'inverse.
   - Déterminant d'une transposée.
   - Effet des opérations sur les lignes ou colonnes.
   - Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.
   - **Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.**
3. Séries numériques
   - Sommes partielles d'une série numérique.
   - Convergence, divergence, somme.
   - Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
   - Reste d'une série convergente.
   - Lien suite-série. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
   - **Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.**
   - Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.
   - Séries à termes positifs ou nuls.
     - Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles, qui est croissante, est majorée.
     - Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ implique celle de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
     - Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.
     - Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Application à l'étude de sommes partielles.
     - Séries de Riemann.
   - Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables
     - Convergence absolue de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).
     - Une série numérique absolument convergente est convergente.
       Somme d'une suite sommable : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

— Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente donc convergente.