Produits scalaires

Exercice 1. *Stricte convexité de la norme*
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Soient x et y dans E tels que : $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\| = 1$. Si $t \in]0,1[$, montrer que $\|tx + (1-t)y\| < 1$.

Exercice 2. *Polynômes de Tchebychev*
Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(t))Q(\cos(t))dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Vérifier que la famille des polynômes de Tchebychev est une base orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$. (Rappel : le n-ième polynôme de Tchebychev, T_n est celui qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos t) = \cos(nt)$).

Exercice 3. *Produit scalaire sur* $\mathbb{R}_2[X]$
$n \geq 2$ est un entier . On considère

$$\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ (P,Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. φ_n est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Déterminer une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi_2)$.

Exercice 4. *Polynômes de Legendre*
On définit pour, $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right).$$

1. (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
   (b) Montrer que L_n possède n racines simples réelles et que celles-ci sont dans $]-1,1[$.
2. Montrer que l'application qui à un couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ associe $\langle P, Q\rangle = \int\limits_{-1}^{1} PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\geq 0}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
   Ind. Effectuer des intégrations par parties.
   (b) Déterminer la norme de L_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   Ind. Utiliser les intégrales de Wallis.
   (c) En déduire l'existence d'une base orthonormée $(\tilde{L}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg \tilde{L}_n = n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

$$\inf\left\{\int_{-1}^{1}(t^n - P(t))^2\,\mathrm{d}t\ ,\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\right\}.$$

Exercice 5. *Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension* 1
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique. Donner la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale d'image :

$$D = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Projection orthogonale sur un s.e.v. défini par des équations*
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire euclidien canonique. Soit :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F.

Exercice 7. *Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$*
On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire euclidien rendant la base canonique orthonormée. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$. Calculer la projection de 1 sur H et la distance de 1 à H.

Exercice 8. *Minimum d'ensembles d'intégrales*
Déterminer :

1. $$\inf \left\{ \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t |\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. $$\inf \left\{ \int_0^\pi (\cos t - at - b)^2 \mathrm{d}t |\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 9. *Orthogonal d'une somme et d'une intersection en dimension finie*
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 10. *Caractérisation des B.O.N.*
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soient $p \leq n$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ des vecteurs de E. Montrer l'équivalence entre :

1. $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base orthonormée ;
2. $\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, v_i \rangle^2$.

Exercice 11. *Calcul d'une projection orthogonale*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 \mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad I(P) \geq I(Q).$$

   On écrit $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ et on pose :

   $$F = \frac{1}{X + n + 1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X + k + 1}.$$

2. Calculer $F(j)$ pour $0 \leq j \leq n - 1$. En déduire F.
3. Montrer que $I(Q) = F(n)$. Calculer cette quantité.

Exercice 12. *Caractérisation des projecteurs orthogonaux par la norme*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 13. *Simplexe régulier*

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe $n+1$ vecteurs unitaires $x_1, \dots, x_{n+1}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n} \cdot$$

Exercice 14. *Famille obtusangles*

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On appelle *famille obtusangle* de vecteurs de E toute famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que : $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que toute famille obtusangle de vecteurs de E est de cardinal fini $\leq n+1$.

Exercice 15. *Base orthonormée et projection orthogonale sur une droite*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que les normes des projections orthogonales des e_i sur D soient toutes égales. Quelle est la valeur commune de ces normes.
2. Soit F un sous-espace de E tel que les projections orthogonales des e_i sur F soient de même norme. Calculer cette norme.

Exercice 16.

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite croissante de sous-espaces de E telle que : $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\dim E_i = i$. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une suite décroissante de réels ≥ 0. Décrire l'ensemble des x de E tels que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad d(x, E_k) = a_k.$$