Fonctions de deux variables

Exercice 1. *Lignes de niveau*
Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x,y) de l'équation $f(x,y)=k$) pour :

$$f_1(x,y)=y^2,\ \text{avec } k=-1 \text{ et } k=1 \qquad f_2(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} \text{ avec } k=2.$$

Exercice 2. *Lignes de niveau à nouveau*
Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x+y-1$ **2.** $f(x,y)=e^{y-x^2}$
3. $f(x,y)=\sin(xy)$

Exercice 3. *Calcul de dérivées partielles*
Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.
1. $f(x,y)=e^x\cos y$.
2. $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 4. *Composition*
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
1. On définit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $g(t)=f(2+2t,t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $h(u,v)=f(uv,u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 5. *Exemples*
Démontrer que les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$;
2. $f(x,y)=x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

Exercice 6. *Points critiques*
Déterminer les points critiques des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f:(x,y)\longmapsto xy(x+y-1)$$

$$g:(x,y)\longmapsto xye^{-(x^2+y^2)}$$

Exercice 7. *Extrema*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

   (a) Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f.

(b) Déterminer un équivalent de $f(x,x)-f(0,0)$ et de $f(x,0)-f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$$

(a) Déterminer l'unique point critique de g et son image par g.

(b) Développer :

$$E = 3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

(c) Que peut-on en déduire sur la nature du point critique ?

Exercice 8. *Fonctions homogènes*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx,ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$

(b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

Exercice 9. *EDP dans le bon sens*

Etant données deux fonctions g_0 et g_1 d'une variable réelle, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = g_0\left(\frac{y}{x}\right) + xg_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Justifier que f est de classe C^2, puis prouver que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Exercice 10. *En détails*

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$

où a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{a}{2}$.

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.