Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas Bardavid

Aide à la coordination

Jérôme Trochon

Équipe des auteurs

Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Carole Chabanier
Geneviève Davion
Hélène Gros
Benjamin Groux
Nicolas Laillet
Blaise Le Meaux
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jérôme Trochon

Relecture

Rémy Allou, Mélissa Baillœuil-Inglart, Anne-Lucie Delvallez, Pierre Cauchois, Jérôme Gärtner, Éliane Gayout, William Gregory, Jonathan Harter, Landry Lavoine, Arthur Meyer, Pedro Montoya, Inès Nebzry, Sébastien Pellerin

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).
Le pictogramme du bateau a été créé par Mello (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Colas Bardavid, sur une idée de Yassine Patel, d'après les biomorphes de Clifford Pickover. Elle illustre les propriétés de certaines fonctions.

Version 1.3.0 — 10 mai 2024

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice est strictement et formellement interdit.

Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose d'essentiel.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, en toute autonomie.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux ⛵ pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges 🕓 pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées ⚙ pour les exercices plus avancés.

Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`*. Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

Conventions suivies dans ce livre

Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « X ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction
$$t \longmapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$
on considérera le polynôme
$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$
- On notera généralement les polynômes P ou Q. Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions.
Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$.
En reprenant l'exemple précédent, on a
$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$
On dit alors que 1 *est une racine de* P.

Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression
$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$
sans préciser qui est la variable x.
- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable x est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que x est un nombre réel différent de -3 et 5.

Bons calculs à vous !

Forme canonique

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x+3)^2$ ....

b) $(3y-4)^2$ ....

c) $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2$ ....

d) $(-\sqrt{3}t-\sqrt{15})^2$ ....

e) $\left(\frac{3}{2}z+2\right)^2$ ....

f) $\left(\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}\right)^2$ ....

Calcul 1.2 — Quelques factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) x^2-25 ....

b) $4t^2-9$ ....

c) $\frac{2}{9}y^2-\frac{4}{5}$ ....

d) u^2+6u+9 ....

e) $9v^2-12v+4$ ......

f) $2z^2+10\sqrt{2}z+25$ ..

Calcul 1.3 — Quelques équations.

Résoudre les équations suivantes.

On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions.

a) $x^2=0$ ....

b) $z^2=17$ ....

c) $(2t+10)^2=0$ .....

d) $\left(-\sqrt{3}y+\sqrt{6}\right)^2=0$

e) $2u^2-10=0$ ......

f) $-\frac{3}{4}v^2+\frac{4}{15}=0$ ....

Changements de forme

Calcul 1.4 — De la forme canonique à la forme développée.

Développer et réduire :

a) $(X-3)^2+7$ ....

b) $2(X+3)^2-5$ ....

c) $-\left(X+\sqrt{2}\right)^2+6$ .....

d) $\sqrt{3}(2X-1)^2-2\sqrt{3}$ ...

e) $\dfrac{3}{4}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ ......

f) $\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}X-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{9}$ ..

Calcul 1.5 — Formes canoniques (I).

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) X^2+2X+2 ....

b) X^2+4X-1 ....

Calcul 1.6 — Formes canoniques (II).

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-X^2+4X-5$ ....

b) $4X^2-8X-3$ ....

c) $-9X^2+36X+4$ .....

d) $-2X^2-20X-17$ ....

Calcul 1.7 — Formes canoniques (III).

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+3X+\dfrac{1}{4}$ .....

b) $\dfrac{1}{4}X^2+X-1$ .....

c) $\dfrac{2}{9}X^2+8X+\dfrac{1}{7}$ ...

d) $-\dfrac{9}{8}X^2-\dfrac{1}{2}X-4$.

e) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2}{3}X+\dfrac{3}{4}$ ..

f) $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}X-\dfrac{6}{7}$.

Calcul 1.8 — Formes canoniques à paramètre (I).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+3X+\lambda$ ....

b) $\dfrac{1}{4}X^2+\lambda X-2$ ....

c) λX^2+8X+5 ....

Calcul 1.9 — Formes canoniques à paramètre (II).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-3X^2-\lambda X+2$ ......

b) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2\lambda}{3}X+\dfrac{3\lambda}{4}$ ....

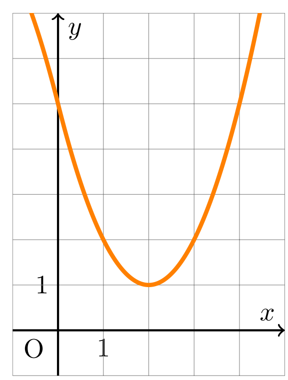
c) $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}\lambda X$ ....

Des représentations graphiques

Calcul 1.10

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?



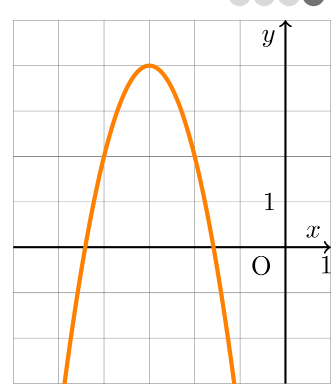
(a) $(X+2)^2-1$
(b) $(X-2)^2-1$
(c) $(X+2)^2+1$
(d) $(X-2)^2+1$

....

Calcul 1.11

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?



(a) $-2(X+3)^2-4$
(b) $-2(X-3)^2-4$
(c) $-2(X+3)^2+4$
(d) $-2(X-3)^2+4$

....

Calcul 1.12

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

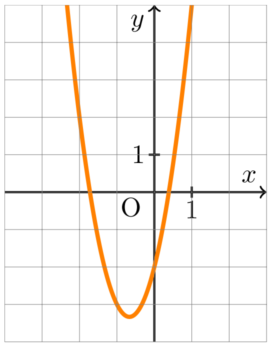


figure 1

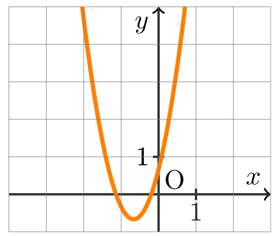


figure 2

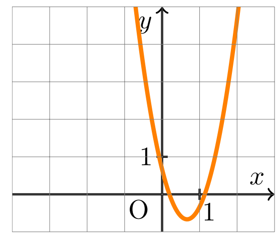


figure 3

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3

Calcul 1.13

On considère la fonction g définie par $g(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + t - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

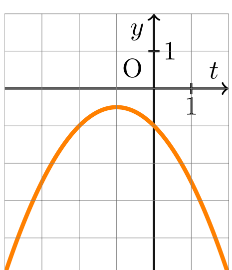


figure 1

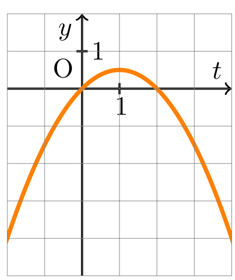


figure 2

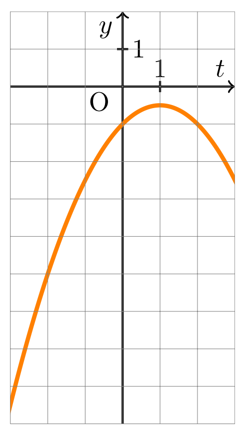


figure 3

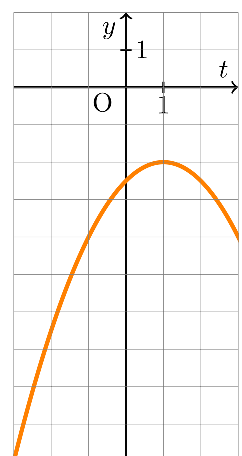


figure 4

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3 (d) figure 4

Calculs plus avancés

Calcul 1.14 — Forme canonique et inégalités.

Dans chacun des cas, déterminer si la proposition est « vraie » ou « fausse » à l'aide de la forme canonique d'un polynôme du second degré.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ .....

b) $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + 3t > -1$ ....

c) $\forall z \in \mathbb{R},\ 3z + z^2 < 2z^2 - 4$ ..

d) $\forall v \in \mathbb{R},\ \dfrac{4}{49}v^2 + \dfrac{61}{9} \geqslant \dfrac{20}{21}v$ ..

Calcul 1.15 — Forme canonique et équations de cercles.

Dans chacun des cas, reconnaître le cercle défini par l'équation cartésienne donnée.

On donnera son centre Ω et son rayon r.

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ ....

b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ ....

c) $x^2 + y^2 - x - \dfrac{2}{3}y = \dfrac{23}{36}$ ....

d) $x^2 + y^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{8}{3}y = -\dfrac{193}{144}$ ....

Réponses mélangées

$-2(X+5)^2+33$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2$ $\quad \Omega=(1,-2)$ et $r=2$ $\quad$ vraie

$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad 9y^2-24y+16$ $\quad (u+3)^2$ $\quad \frac{2}{9}(X+18)^2-\frac{503}{7}$ $\quad \{-5\}$

$(2t-3)(2t+3)$ $\quad \Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right)$ et $r=\sqrt{2}$ $\quad \left\{\sqrt{2}\right\}$ $\quad u^2-2\sqrt{7}u+7$ $\quad$ vraie

$X^2-6X+16$ $\quad \Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ et $r=1$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2\,581}{4\,032}$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda$

$\lambda\left(X+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}$ $\quad (X+1)^2+1$ $\quad -\frac{9}{8}\left(X+\frac{2}{9}\right)^2-\frac{71}{18}$

$\{0\}$ $\quad -X^2-2\sqrt{2}X+4$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{19}{36}$ $\quad \frac{9}{4}z^2+6z+4$ $\quad -3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2$

$\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}$ $\quad 2X^2+12X+13$ $\quad (X+2)^2-5$ $\quad$ c $\quad \left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$ $\quad$ fausse

$-9(X-2)^2+40$ $\quad 3t^2+6\sqrt{5}t+15$ $\quad$ d $\quad \left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$ $\quad \frac{1}{4}(X+2)^2-2$

$(x-5)(x+5)$ $\quad 4x^2+12x+9$ $\quad (3v-2)^2$ $\quad 4(X-1)^2-7$ $\quad$ a $\quad \frac{5}{18}X^2+\frac{10}{9}X+\frac{8}{9}$

$\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{19}{16}$ $\quad \Omega=(-3,5)$ et $r=4$ $\quad \left(\sqrt{2}z+5\right)^2$ $\quad \frac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2$

$4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}$ $\quad \left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}$ $\quad$ c $\quad$ fausse $\quad -(X-2)^2-1$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-2$

► Réponses et corrigés page 154

Discriminant et racines I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 2.1

Calculer les nombres suivants.

On attend la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{10-\sqrt{16}}{4}$ ....

b) $\dfrac{5+\sqrt{9}}{6}$ ....

c) $\dfrac{-6-\sqrt{12}}{2}$ ....

d) $\dfrac{8+\sqrt{48}}{4}$ ....

Calcul 2.2

Calculer les nombres suivants.

On attend les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $5^2 - 4 \times 5 \times \dfrac{3}{8}$ ....

b) $(-6)^2 + \dfrac{3}{5} \times (-7) \times 15$ ....

c) $-7^2 - 8 \times \dfrac{1}{3} \times 27$ ....

d) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \dfrac{17}{32} \times \dfrac{24}{15}$ ....

Premiers calculs

Calcul 2.3 — Premiers discriminants.

Calculer le discriminant de chacun des polynômes définis ci-dessous.

a) $X^2 + 2X + 3$ ....

b) $-X^2 - 2X + 4$ ....

Calcul 2.4 — Calculs de discriminants.

Calculer le discriminant de chacun des polynômes définis ci-dessous.

a) $3X^2 - 4X + \dfrac{7}{4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{2}{3}X - \dfrac{3}{4}$ ....

c) $\dfrac{4}{5}X^2 - \sqrt{7}X - \dfrac{5}{6}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{7}X^2 + \sqrt{3}X + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ....

Calcul 2.5 — Premières racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants.

a) $X^2 + 2X - 4$ ......

b) $-X^2 - 3X + 2$ ....

Calcul 2.6 — Calculs de racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants.

a) $4X^2 - 3X + \dfrac{1}{4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X - 3$ ....

c) $2X^2 + \dfrac{1}{3}X - \dfrac{1}{3}$ ....

d) $3X^2 - 2\sqrt{2}X - \dfrac{2}{3}$ ....

Calcul 2.7 — Un polynôme à paramètre.

Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = X^2 + bX + 1$.

a) Lorsque $b = -2$, le polynôme P admet-il deux racines distinctes ? ....

b) Calculer le discriminant de P en fonction de b ....

c) Pour quelles valeurs de b le polynôme admet-il deux racines distinctes ? ...

Calcul 2.8 — Un deuxième polynôme à paramètre.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, un réel non nul. On considère le polynôme $Q = aX^2 + 3X - 5$.

a) Calculer le discriminant de Q ....

b) Pour quelles valeurs de a le polynôme Q a-t-il exactement une racine ? ....

Calcul 2.9 — Un troisième polynôme à paramètre.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $R = 2X^2 - 5X + c$.

a) Calculer le discriminant de R ....

b) Pour quelles valeurs de c le polynôme R n'admet-il aucune racine ? ....

Calcul 2.10 — Inéquations (I).

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$ ....

b) $y^2 + 3y \leqslant 2$ ....

c) $-t^2 < 5t + 4$ ....

Calcul 2.11 — Inéquations (II).

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $4z \geqslant \dfrac{3}{4} - z^2$ ....

b) $\dfrac{1}{3}u^2 + \dfrac{2}{5}u + \dfrac{3}{7} > 0$ ....

c) $v - \sqrt{3} \geqslant v^2$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 2.12 — Propositions paramétrées I.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3X - 4$ ....

b) Avec $P = \dfrac{2}{5}X^2 + 2aX + \dfrac{1}{3}$ ....

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{5}{7}X + \dfrac{a}{2}$ ....

Calcul 2.13 — Propositions paramétrées II.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3aX - 4$ ....

b) Avec $P = \dfrac{2a}{5}X^2 + 2X + \dfrac{a}{3}$ ....

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{7}{5}aX + \dfrac{a}{6}$ ....

Calcul 2.14 — Un système à paramètre.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère le système $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \\ y = tx \end{cases}$ d'inconnues x et y.

Pour quelles valeurs de t le système précédent a-t-il des solutions ? ....

Réponses mélangées

$]-\infty,1[\cup\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$	$\dfrac{13}{7}$	$\dfrac{35}{2}$	$-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$	$-\dfrac{43}{16}$	-5	non	-27
-3 et 2	-8	20	$a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}},\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]$	$25-8c$	$\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$		
$a \in \left[\dfrac{25}{147},+\infty\right[$	$a \in \left[0,\dfrac{25}{49}\right]$	$t \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]$	$\dfrac{29}{3}$	$-3-\sqrt{3}$	$a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}},+\infty\right[$	$2+\sqrt{3}$	
$c \in \left]\dfrac{25}{8},+\infty\right[$	b^2-4	$-\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{\sqrt{2}-2}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+2}{3}$	$\left]-\infty,-2-\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right]\cup\left[-2+\dfrac{\sqrt{19}}{2},+\infty\right[$			
$b \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$	aucune	$\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$	-121	$9+20a$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$	
$\varnothing$	aucune	$\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$	$\dfrac{35}{18}$	$]-\infty,-4[\cup]-1,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{4}{3}$	

► Réponses et corrigés page 159

Discriminant et racines II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 3.1

Donner, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $-2x > \dfrac{4}{3}$ ....

b) $2x - \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{3}$ ....

c) $2x - \dfrac{1}{12} < \dfrac{2}{3}x$ ....

d) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{5} \geqslant -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}$ ......

Calcul 3.2

Simplifier les expressions suivantes, où n est un entier naturel.

a) $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$ ....

b) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$ ....

c) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 3^{n-1}$ ...

d) $\dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$ ....

Factorisation de trinômes du second degré

Calcul 3.3

Factoriser les trinômes suivants.

On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.

a) $X^2 - 7X + 12$ ....

b) $X^2 - 3X - 10$ ....

c) $2X^2 - X - 3$ ....

d) $6X^2 - 5X + 1$ ....

Calcul 3.4

Factoriser les trinômes suivants.

On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.

a) $X^2 + \frac{5}{2}X + 1$ ....

b) $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ ....

c) $2X^2 - \frac{7}{6}X + \frac{1}{6}$ ....

d) $X^2 - \frac{24}{5}X - 1$ ....

Calcul 3.5

Factoriser les trinômes suivants.

On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.

a) $X^2 - 2X - 1$ .....

b) $X^2 - 2X - 2$ .....

c) $X^2 - 2\sqrt{5}X - 4$ ..

d) $2X^2 - 6X + 1$ ...

Calcul 3.6 — Factorisation avec un paramètre.

Donner la factorisation des trinômes suivants, où m désigne un paramètre réel.

On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.

a) $X^2 + mX - 2m^2$ ....

b) $X^2 - 2X + 1 - 2m^2$ ....

c) $2X^2 + (m+6)X + 3m$.

d) $X^2 - 2X - m^2$ ....

Équations se ramenant à une équation du second degré

Calcul 3.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes.

a) $x + \frac{1}{x} = 2$ ....

b) $x + 2 = \frac{3}{x}$ ....

Calcul 3.8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes.

a) $x - \frac{1}{x-2} = 1$ ....

b) $\frac{2x}{x^2-1} = 4 - \frac{1}{x-1}$ ......

Calcul 3.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes.

a) $x+5=\sqrt{x+11}$ ....

b) $x=1+\sqrt{x^2-2}$ ....

Calcul 3.10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes.

a) $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x-1}$ ....

b) $\sqrt{x}-2-\dfrac{7\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2}=0$ ....

Factorisation de polynômes de degré 3

Calcul 3.11 — Factorisation d'un polynôme de degré 3 (I).

On considère le polynôme $P=X^3-7X+6$.

a) Calculer $P(1)$ ....

b) Factoriser P par $X-1$ ....

c) En déduire une factorisation de P ....

Calcul 3.12 — Factorisation d'un polynôme de degré 3 (II).

On considère le polynôme $P=2X^3+13X^2+16X+5$.

a) Calculer $P(-1)$ ....

b) Factoriser P par $X+1$ ....

c) En déduire une factorisation de P ....

Calcul 3.13

En s'inspirant de la démarche des deux calculs précédents, factoriser les polynômes suivants.

a) X^3-3X^2+X+1 ....

b) $4X^3-4X^2-5X+3$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 3.14 — Une équations bicarrée.

On cherche à résoudre l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, d'inconnue x réelle.

a) Quelle équation obtient-on en posant $y = x^2$? ....

b) Factoriser le trinôme $y^2 - 7y + 12$ ....

c) En déduire les solutions de l'équation initiale ....

Calcul 3.15 — Équations bicarrées.

En s'inspirant de la démarche du calcul précédent, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

a) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ ....

b) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$ ....

Calcul 3.16 — Écart entre les deux racines (I).

Soit a un réel. On note α et β les deux racines réelles du polynôme $X^2 + (a-2)X - 2a$.

Déterminer les valeurs de a telles que $|\alpha - \beta| = 1$ ....

Calcul 3.17 — Écart entre les deux racines (II).

Soit a un réel. On note α et β les deux racines réelles du polynôme $X^2 - \big(a^2+1\big)X + a^2$.

Déterminer les valeurs de a telles que $|\alpha - \beta| = 1$ ....

Réponses mélangées

$\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[$ $\quad \left(X-1-\sqrt{3}\right)\left(X-1+\sqrt{3}\right)$ $\quad \left(X-1-\sqrt{2}m\right)\left(X-1+\sqrt{2}m\right)$

$\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{8}\right\}$ $\quad y^2-7y+12=0$ $\quad (y-4)(y-3)$ $\quad 2(X+1)\left(X-\dfrac{3}{2}\right)$

$\left]-\infty, \dfrac{1}{16}\right[$ $\quad \left(X+\dfrac{1}{5}\right)(X-5)$ $\quad \left\{\pm1, \pm\sqrt{5}\right\}$ $\quad (X-1)\left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)$

$(X-1)\left(X^2+X-6\right)$ $\quad 2(X+1)(X+5)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad \left(X-1-\sqrt{m^2+1}\right)\left(X-1+\sqrt{m^2+1}\right)$

$\left[\dfrac{4}{15}, +\infty\right[$ $\quad \{-3,1\}$ $\quad \left[-\dfrac{1}{35}, +\infty\right[$ $\quad 2\left(X+\dfrac{m}{2}\right)(X+3)$ $\quad \dfrac{1}{9\times 2^n}$

$\left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$ $\quad \{-2\}$ $\quad (X-m)(X+2m)$ $\quad \left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)$

$(X-1)(X-2)(X+3)$ $\quad (X-3)(X-4)$ $\quad 2\left(X-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\left(X-\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$ $\quad \{1,36\}$

$\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ $\quad 2^2\times 3^7$ $\quad (X+2)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad \{25\}$ $\quad \left\{\pm2\sqrt{2}\right\}$ $\quad (X+2)(X-5)$

$\left\{\pm2, \pm\sqrt{3}\right\}$ $\quad \left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ $\quad -2\times 3^{n-1}$ $\quad 0$ $\quad 2\left(X-\dfrac{1}{3}\right)\left(X-\dfrac{1}{4}\right)$ $\quad 0$

$\left(X+3-\sqrt{5}\right)\left(X-3-\sqrt{5}\right)$ $\quad 13\times 2^n$ $\quad \{-1,-3\}$ $\quad (X+1)\left(2X^2+11X+5\right)$

$\{1\}$ $\quad 4(X+1)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad \left(X-\dfrac{1}{2}\right)(X+1)$ $\quad 6\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{3}\right)$

► Réponses et corrigés page 163

Polynômes I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 4.1

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ ....

b) $\dfrac{7}{2} - \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{3}$ ....

c) $2 \times \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{4}$ ....

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$ ....

e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \dfrac{-2}{3} - \dfrac{16}{9}$ ....

f) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3 + \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ ....

Calcul 4.2

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} a + 2b &= 1 \\ 3a - b &= 2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b + c = 6 \\ 3b + 2c = -5 \\ -3c = -6 \end{cases}$ ....

Evaluation des polynômes

Calcul 4.3 — Une petite mise en jambes.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

a) $P = 3 + 9X - X^2 - 5X^4$ et $a = 2$ ....

b) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = 1$ ....

c) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = -1$ ....

d) $P = 1 - 9X^2 + 10X$ et $a = -3$ ....

e) $P = 4X - 2X^2 + 9 - X^3$ et $a = -4$ ....

Calcul 4.4 — Avec des nombres rationnels.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = 3X^3 - 4X^2 + 2$ et $a = \dfrac{2}{3}$ ....

b) $P = 5 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{2}{3}X^2 + 3X^3$ et $a = 3$ ....

c) $P = -4X^4 + \dfrac{2}{3}X^3 + 3X^2 - \dfrac{1}{2}X + 2$ et $a = -2$ ....

d) $P = \dfrac{1}{25}X^3 - X^2 - 3X + 1$ et $a = \dfrac{5}{3}$ ....

e) $P = \dfrac{1}{2}X - \dfrac{-2}{5}X^2 - 3X^3 + 1$ et $a = \dfrac{-4}{3}$ ....

Calcul 4.5

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = (3X^2 - 4X + 2)(X^5 - 3X + 2) - (X^2 - 1)$ et $a = 2$ ....

b) $P = \dfrac{1}{2} + 3X^5 - (4X^4 + 2X^2 - 3)(X^3 + 2) - \dfrac{1}{3}X^2$ et $a = -1$ ....

Calcul 4.6 — Pêle-mêle.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme irréductible et les racines carrées seront réduites.

a) $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ....

b) $P = \left(X^2 + 4\right)^2 \left(3X - \dfrac{1}{2}\right)$ et $a = -\sqrt{2}$ ....

c) $P = \left(\sqrt{2}\left(X^2 - 1\right)^2 - 2\right)\left(3X - \dfrac{1}{2}\right) + 84X + 33$ et $a = 1 - \sqrt{2}$ ....

Opérations sur les polynômes

Calcul 4.7 — Développer, réduire et ordonner (I).

Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de X les polynômes suivants.

a) $(X-1)^2\left(X^2 + X + 1\right)$ ....

b) $(X+2)(-2X+7) - 2(2X-3)$ ....

c) $X + \left(\dfrac{2}{3}X + 5\right)\left(X - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{5}$ ....

Calcul 4.8 — Développer réduire et ordonner (II).

Développer, réduire et ordonner selon les puissances croissantes de X les polynômes suivants.

a) $(X^3 - 5X + 2)(-2X^2 + 7X - 1)$ ....

b) $X - \left(X^3 - \dfrac{1}{2}X + 2\right)\left(-2X^2 + X - \dfrac{3}{4}\right) - 6X^2$ ....

c) $(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(1 - \sqrt{2}X + X^2)$ ....

Calcul 4.9 — Composition de polynômes (I).

Étant donnés deux polynômes P et Q, on fabrique un polynôme, noté $P \circ Q$, en substituant l'expression de Q à l'indéterminée X dans P. Par exemple, pour $P = 4X^2 - 7X + 5$ et $Q = X^2 - 3$, on a

$$P \circ Q = 4\big(X^2 - 3\big)^2 - 7\big(X^2 - 3\big) + 5.$$

Dans chacun des cas suivants, exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de X.

a) $P = 2X + 1$ et $Q = 4X + 3$ ....

b) $P = 4X + 3$ et $Q = 2X + 1$ ....

c) $P = 2X - 1$ et $Q = 3X^2 - X + 1$ ....

Calcul 4.10 — Composition de polynômes (II).

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de X.

a) $P = X^2 - X + 1$ et $Q = 2X - 1$ ....

b) $P = X^2 + 3X + 1$ et $Q = X^3 + X - 2$ ....

c) $P = X^3 + X - 2$ et $Q = X^2 + 3X + 1$ ....

Calcul 4.11 — Composition de polynômes (III).

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de X.

a) $P = X^3 - \sqrt{2}X^2 - X$ et $Q = \sqrt{2}X + 1$ ....

b) $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et $Q = X - 2$ ....

Calcul 4.12 — Composition de polynômes (IV).

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de X.

a) $P = \left(X + 1 + \sqrt{3}\right)\left(2X - \sqrt{3}\right)$ et $Q = X^2 + 1$ ....

b) $P = \left(X^2 + 1\right)(2X - 3)$ et $Q = X^2 + \sqrt{2} - 1$ ....

Racines des polynômes

Calcul 4.13 — Racine ou pas ?

Dans les cas suivants, dire (« oui » ou « non ») si le nombre a est racine du polynôme P.

a) $P = -4X^2 + 16X - 7$ et $a = \dfrac{-7}{2}$ ....

b) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = -1$ ....

c) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = 2 - \sqrt{5}$ ....

d) $P = X^4 + 17X^2 + 12X$ et $a = -2 - \sqrt{3}$ ....

Calcul 4.14 — Condition pour être racine.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de m pour que $P(a) = 0$.

a) $P = 6mX^5 - X^4 + (m+2)X^3 - X^2 - X + m$ et $a = 1$ ....

b) $P = X^2 - \left(m^2 + 2m - 1\right)X + 2m^3 - 2m$ et $a = 1 + m^2$ ....

c) $P = X^3 + (1 - 2m)X^2 - m(1+m)X + 2m^2(m-1)$ et $a = 2m + 1$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 4.15

On considère le polynôme

$$P = X^5 - 5X^3 + \left(5 + \sqrt{17}\right)X^2 + 2X - 4.$$

Le nombre $a = -\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}}$ est-il une racine du polynôme P ? ....

Calcul 4.16 — Une formule pour la somme des cubes.

Soit P un polynôme de degré 4 tel que

$$P \circ (X+1) - P = X^3 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

a) Déterminer P (sous sa forme factorisée).

On pourra écrire $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$; il s'agira alors de déterminer ses coefficients.

....

b) En déduire, pour n entier naturel non nul, une expression simple de $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

....

Calcul 4.17

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de m pour que $P(a) = 0$.

On pourra chercher des racines évidentes.

a) $P = X^3 - \big(m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = 2$ ....

b) $P = X^3 - \big(3m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = -1+\sqrt{2}$ ....

Réponses mélangées

$7+8X$ $\quad -2X^2 - X + 20$ $\quad -\dfrac{178}{27}$ $\quad -\sqrt{2} + (2\sqrt{2}-4)X + (6-2\sqrt{2})X^2 + 2\sqrt{2}X^3$ $\quad (a,b) = \left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$

0 $\quad$ oui $\quad m = 1$ $\quad -1 - X + X^2 - X^3 + 2X^4 + X^6$ $\quad (a,b,c) = (1,-3,2)$ $\quad -18(1+6\sqrt{2})$

$\dfrac{31}{6}$ $\quad 0$ $\quad 18\sqrt{2} - 28 + (26-18\sqrt{2})X^2 + (6\sqrt{2}-9)X^4 + 2X^6$ $\quad$ oui $\quad m = \dfrac{1}{8}$ $\quad -63$ $\quad m \in \left\{-2, \dfrac{-1}{3}\right\}$

$\dfrac{-1}{45}$ $\quad 165$ $\quad 1 - 2X + 6X^2$ $\quad \dfrac{367}{45}$ $\quad m \in \left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right\}$ $\quad 7+8X$ $\quad 0$

$\dfrac{67}{30}$ $\quad -\dfrac{35}{6}$ $\quad m \in \left\{1, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 1-2\sqrt{2}\right\}$ $\quad -2 + 19X - 39X^2 + 9X^3 + 7X^4 - 2X^5$

$-\dfrac{1}{40}$ $\quad X^4 - X^3 - X + 1$ $\quad \dfrac{181}{2}$ $\quad 12X + 31X^2 + 45X^3 + 30X^4 + 9X^5 + X^6$ $\quad -\dfrac{5}{6}$

25 $\quad$ non $\quad 3 - 6X + 4X^2$ $\quad \dfrac{10}{9}$ $\quad 1 + X^4$ $\quad -\dfrac{163}{3}$ $\quad$ oui $\quad$ non

$\dfrac{2}{3}X^2 + 5X - \dfrac{73}{10}$ $\quad -110$ $\quad -1 + 3X - 3X^2 + X^3$ $\quad \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\quad 0$

$1 + (6+\sqrt{3})X^2 + 2X^4$ $\quad \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}X - \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{4}X^3 - X^4 + 2X^5$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad P = \dfrac{(X-1)^2X^2}{4}$

► Réponses et corrigés page 171

Polynômes II

Remarque
Dans cette fiche, on présente, à travers des exemples, différentes techniques pour factoriser un polynôme.

Le but est d'éviter de calculer le discriminant.

Ainsi, dans tous les calculs proposés, on cherchera à répondre sans calculer de discriminant.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 5.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer et ordonner les expressions suivantes.

a) $(a+1)(a+2)(a+3)$ ...

b) $(a-1)(a^2+a+1)$ .....

Calcul 5.2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $(2X+1)^2 - 25$ ....

b) $(X+3)^2 - (3X+5)^2$

c) $2X^2 - 16$ ....

d) $(X-1)^2 - 3$ ......

Premières factorisations

Calcul 5.3 — Factorisez !

En reconnaissant des facteurs communs, factoriser les expressions suivantes.

a) $X + X(X-3)$ .....

b) $X^2 - X$ ....

c) $(X-1)(X-3) + (X+2)(X-1)$ ....

d) $X(X+2) + (X+1)(X+2) + (X+2)^2$ ....

e) $(3X+2)(2X-1) - (3X+2)(7X-4)$ ....

Calcul 5.4 — Factorisez, encore !

En utilisant des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes.

a) $X^2 - 10X + 25$ ....

b) $X^2 - 3$ ....

c) $2X^2 - 2\sqrt{2}X + 1$ ..

d) $25 - (2X + 3)^2$ ....

Calcul 5.5 — Facteurs communs et identités remarquables (I).

En reconnaissant des facteurs communs et en utilisant des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes.

a) $X(X + 1) + X^2 - 1$ ....

b) $X^2 - 9 - (X - 3)(X - 5)$ ....

c) $(X - 2)(X + 4) + X^2 - 4X + 4$ ....

Calcul 5.6 — Facteurs communs et identités remarquables (II).

Même exercice.

a) $(-7X - 6)(6X + 8) + (36X^2 - 64)$ ....

b) $-X^2 + 81 + (2X + 3)(-X - 9)$ ....

c) $(X + 3)^2 - (2X + 5)^2 - X - 2$ ....

En utilisant les racines

Calcul 5.7 — Une méthode fondamentale (I).

Les coefficients d'un polynôme de degré 2 unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient dominant vaut 1) sont reliés à ses racines : si les racines du polynôme $P = X^2 + bX + c$ sont α et β, alors on a

$$\boxed{\alpha + \beta = -b} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha\beta = c.}$$

a) Le polynôme $P = X^2 - 5X + 6$ admet 1 comme racine. Quelle est l'autre ? ....

b) Le polynôme $P = X^2 - 12X - 64$ admet -4 comme racine. Quelle est l'autre ? ....

c) Le polynôme $P = X^2 - \dfrac{21}{2}X + 5$ admet $\dfrac{1}{2}$ comme racine. Quelle est l'autre ? ....

d) Le polynôme $P = X^2 + 127X + 372$ admet -3 comme racine. Quelle est l'autre ? ......

Calcul 5.8 — **Une méthode fondamentale (II).**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre. En utilisant la même méthode, répondre aux questions suivantes.

a) Le polynôme $P = X^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)X + 1$ admet a comme racine. Quelle est l'autre ? ....

b) Le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 - a^2$ admet $1 + a$ comme racine. Quelle est l'autre ? ...

Calcul 5.9 — **Une méthode fondamentale (III).**

Quand le polynôme n'est plus unitaire (c'est-à-dire quand son coefficient dominant ne vaut pas 1), il faut modifier les formules ci-dessus : si $P = aX^2 + bX + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$, est un polynôme dont les racines sont α et β, alors on a

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}.}$$

a) Le polynôme $P = 3X^2 - 4X + 1$ admet 1 comme racine. Quelle est l'autre ? ....

b) Le polynôme $P = 2X^2 - 5X - 12$ admet 4 comme racine. Quelle est l'autre ? ....

c) Le polynôme $P = 5X^2 + 31X + 6$ admet -6 comme racine. Quelle est l'autre ? ....

Calcul 5.10 — **Avec des racines entières visibles.**

Les polynômes suivants ont des racines entières. Les trouver en s'appuyant sur les techniques précédentes donnant leur somme et leur produit, puis en déduire une factorisation du polynôme.

a) $X^2 + X - 2$ ....

b) $X^2 - 5X + 6$ ....

c) $-X^2 + 7X - 10$ ....

d) $X^2 + 2X - 35$ ....

e) $-X^2 + 21X + 46$ ....

f) $X^2 - 11X - 60$ ....

Calcul 5.11 — À la recherche des coefficients.

On considère le polynôme $P = aX(X-1) + b(X-1)(X-2) + cX(X-2)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) On sait que $P(1) = 2$, que vaut c ? ....

b) On sait que $P(0) = -1$, que vaut b ? ....

c) On sait que $P(2) = 4$, que vaut a ? ....

En degré plus élevé

Calcul 5.12

Factoriser les polynômes suivants en produits de polynômes de degré 1.

a) $X^3 - X$ ....

b) $X^4 - X^2$ ....

c) $(X^2 - 1)X^2 + (X^2 - 1)X^3$ ....

d) $(X^2 + 2X + 1)(X - 2) + (X + 1)X$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 5.13

À l'aide d'une identité remarquable, factoriser le polynôme suivant en produit de trois facteurs non constants.

$X^4 - 1$ ....

Calcul 5.14

Factoriser les polynômes suivants en produit de deux facteurs non constants.

a) $X^4 + 2X^2 + 1$ ....

b) $4X^8 + 1 + 4X^4$ ....

c) $(X^2 + 1)^2 - 2X^2$ ....

Calcul 5.15 — Autour de la formule de Bernoulli.

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on a la factorisation suivante :

$$X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}X^k = (X-a)(X^{n-1} + aX^{n-2} + \cdots + a^{n-2}X + a^{n-1}).$$

Par exemple, avec $a = 2$ et $n = 3$, la formule donne $X^3 - 8 = (X-2)(X^2+2X+4)$.

Il faut garder à l'esprit que cette identité est valide aussi bien pour $a > 0$ que pour $a < 0$.

À l'aide de cette formule, factoriser les polynômes suivants :

a) $X^3 - 27$ ..... $\boxed{}$

b) $X^3 + 1$ ...... $\boxed{}$

c) $X^5 - 32$ ..... $\boxed{}$

d) $X^5 + 1$ ...... $\boxed{}$

e) $X^7 - 1$ ...... $\boxed{}$

Calcul 5.16 — Une grande identité remarquable.

Factoriser le polynôme $X^{12} - 1$ en faisant apparaître au moins 4 facteurs non constants.

.... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$(X+1)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})$ $\quad 1-a \quad$ $-(X-5)(X-2)$ $\quad (X-2)(X^4+2X^3+4X^2+8X+16)$

$X^2(X-1)(X+1)^2$ $\quad (-X-14)(6X+8)$ $\quad -\dfrac{1}{5}$ $\quad (X^2+1)(X-1)(X+1)$

$(X+2)(3X+3)$ $\quad (2X-4)(2X+6)$ $\quad (2X^4+1)^2$ $\quad 2$ $\quad \big(X^2+\sqrt{2}X+1\big)\big(X^2-\sqrt{2}X+1\big)$

$(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)(X^6+1)$ $\quad -124$ $\quad (X-2)(X-3)$ $\quad -(X-23)(X+2)$ $\quad 10$

$(4X+8)(-2X-2)$ $\quad (X+7)(X-5)$ $\quad (X+1)(X^2-X+1)$ $\quad a^3+6a^2+11a+6$

$(X-1)(2X-1)$ $\quad \dfrac{1}{a}$ $\quad (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$ $\quad (\sqrt{2}X+4)(\sqrt{2}X-4)$ $\quad -\dfrac{3}{2}$

$(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)$ $\quad (\sqrt{2}X-1)^2$ $\quad (3X+2)(-5X+3)$ $\quad 6$ $\quad X^2(X-1)(X+1)$

$X(X-2)$ $\quad X(X-1)$ $\quad 16$ $\quad -2$ $\quad (2X-1)(X+1)$ $\quad (X-1)(X+2)$

$(X-2)(2X+2)$ $\quad (2X+8)(-2X+2)$ $\quad 8(X-3)$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad (X-3)(X^2+3X+9)$ $\quad (X-5)^2$

$(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)$ $\quad (X^2+1)^2$ $\quad (X-15)(X+4)$ $\quad a^3-1$ $\quad (3X+9)(-X-2)$

$-\dfrac{1}{2}$ $\quad (X-1+\sqrt{3})(X-1-\sqrt{3})$ $\quad (3X-6)(-X-9)$ $\quad X(X-1)(X+1)$

► Réponses et corrigés page 174