Dérivation I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 6.1 — Des puissances.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Écrire sous la forme « 2^k », avec $k \in \mathbb{Z}$, les nombres suivants.

a) $2^n + 2^n$ ......

b) $2^n \times 2^n$ ......

c) $\dfrac{8^n \times 2^{n+3}}{4^{n+1}}$ ...

Calcul 6.2 — Factorisations dans des fractions.

Soit n un entier non nul.

Dans chacun des cas suivants, factoriser par $B(n)$ le numérateur et le dénominateur des fractions $A(n)$ données, puis donner l'expression simplifiée.

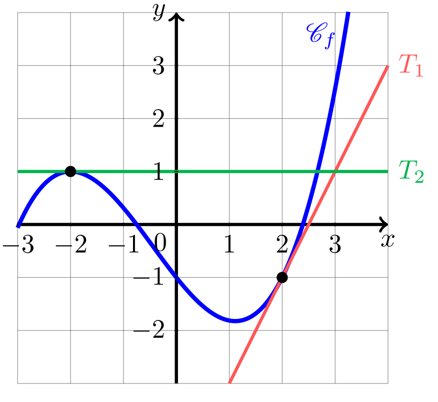
a) $A(n) = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3}$ et $B(n) = n^2$ ....

b) $A(n) = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^3 - \frac{n^2}{2} + 5n}$ et $B(n) = n^3$ ....

Lectures graphiques

Calcul 6.3 — Lecture graphique d'un nombre dérivé (I).

Dans le repère ci-dessous, on a représenté le graphe d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que deux de ses tangentes.



Déterminer graphiquement :

a) $f'(-2)$ ....

b) $f'(2)$ ....

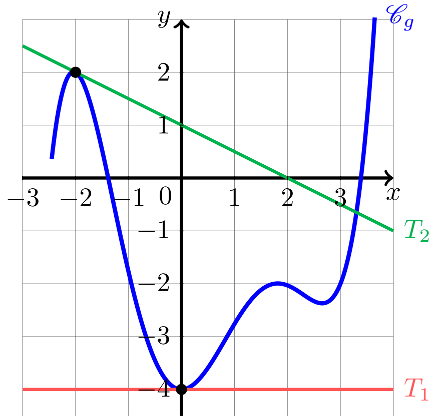
Calcul 6.4 — Lecture graphique d'un nombre dérivé (II).

Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que deux de ses tangentes.

Déterminer graphiquement :

a) $g'(-2)$ ....

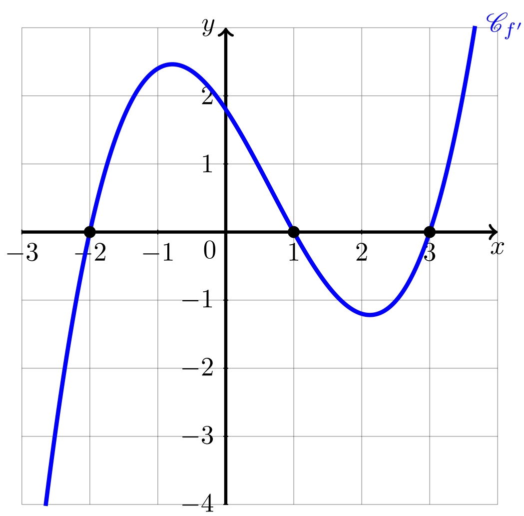
b) $g'(0)$ ....



Calcul 6.5 — Une courbe, trois tableaux.

On considère f_1, f_2 et f_3 des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative d'une certaine fonction dérivée, notée f', est tracée dans le repère ci-dessous ainsi que trois tableaux de variation.



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f_1		↗		↘		↗	

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f_2		↗		↘		↗		↘	

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f_3		↘		↗		↘		↗	

f' est la fonction dérivée de :

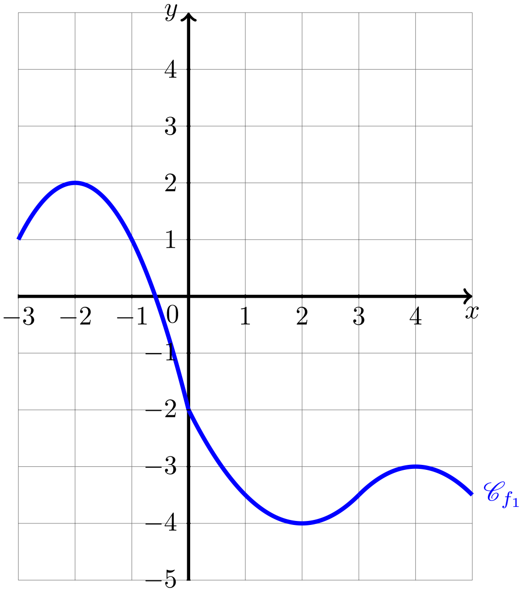
(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3

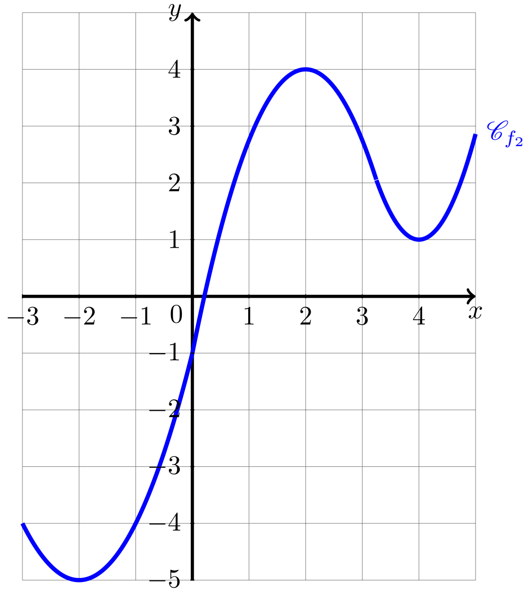
....

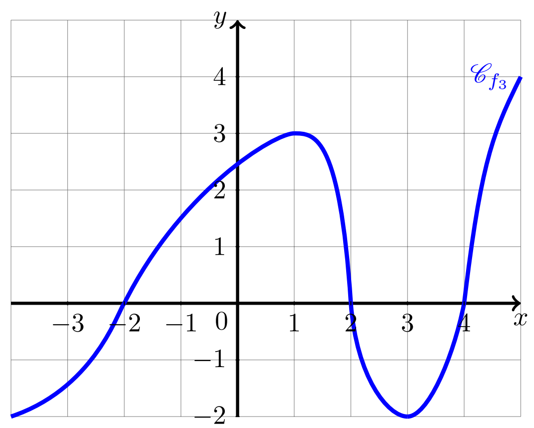
Calcul 6.6 — Un tableau et trois courbes (I).

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que les courbes représentatives de trois fonctions : f_1, f_2 et f_3.

x	$-\infty$	-2	1	2	3	4	$+\infty$
f'	$-\infty$	0	3	0	-2	0	$+\infty$







La fonction f' est la fonction dérivée de :

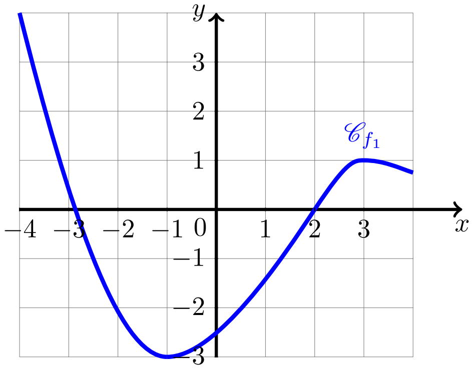
(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3

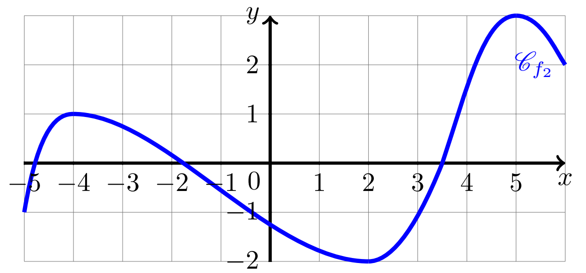
....

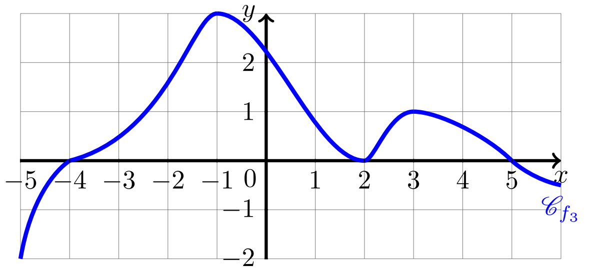
Calcul 6.7 — Un tableau et trois courbes (II).

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ et, ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions : f_1, f_2 et f_3.

x	$-\infty$	-4	-1	2	3	5	$+\infty$
f'	$+\infty$	0	-3	0	1	0	$-\infty$







f' est la fonction dérivée de :

ⓐ f_1 ⓑ f_2 ⓒ f_3

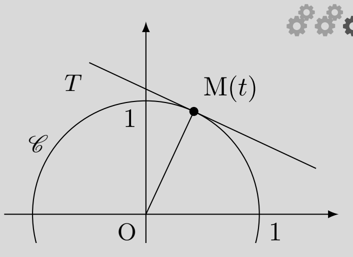
. . . .

Calculs plus avancés

Calcul 6.8 — Tangente et rayon.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Pour $t \in]-1, 1[$, on note M(t) l'unique point du cercle $\mathscr{C}$ d'abscisse t et d'ordonnée strictement positive, et on note y_t l'ordonnée de M(t).



a) Exprimer la distance OM(t) en fonction de t . . . .

b) En déduire une expression de y_t en fonction de t ....

On admet la propriété suivante : si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que, pour tout $x \in I, u(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

c) Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Donner l'expression de $f'(t)$.

....

d) On fixe $t \in]-1, 1[$ et on note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse t.

Donner l'équation réduite de T ....

e) Donner un vecteur directeur de T ....

On notera $\vec{w}$ ce vecteur.

f) Donner un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{OM}(t))$ ....

On rappelle la propriété suivante : si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x \times x' + y \times y' = 0$.

g) Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$ sont-ils orthogonaux ? ....

Réponses mélangées

2^{2n} $\qquad 0 \qquad$ $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}$ $\qquad 2^{n+1} \qquad 2 \qquad \sqrt{t^2 + y_t^2} \qquad \dfrac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{2n} + \frac{5}{n^2}}$

$\dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix} \qquad \sqrt{1-t^2}$ $\qquad$ oui $\qquad 0 \qquad -\dfrac{1}{2}$

c $\qquad$ b $\qquad$ b $\qquad y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad 2^{2n+1} \qquad \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$

► Réponses et corrigés page 178

Dérivation II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 7.1

Donner (sous la forme d'un intervalle) l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\frac{4}{3}x > \frac{6}{5}$ ....

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leqslant \frac{5}{7}$ ....

c) $-2x - \frac{2}{9} < \frac{1}{2}x$ ....

d) $2x - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{5} + \frac{7}{3}x$ ....

Calcul 7.2

Simplifier les fractions suivantes.

a) $\frac{2^5 \times 3^4}{2^8 \times 3^2}$ ......

b) $\frac{3^3 \times 2^5}{6^4}$ ......

c) $\frac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2}$ ....

Calcul 7.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 - 10x - 3.$$

Calculer $f(a)$ pour les valeurs de a suivantes.

a) $a = -\frac{1}{2}$ ......

b) $a = \sqrt{3}$ ....

c) $a = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ......

d) $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ..

e) $a = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

f) $a = \frac{\sqrt{8}-4}{2}$ ..

Dérivation de polynômes

Calcul 7.4

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 - 6x + 2$ ....

b) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{10}x^2 - \frac{592}{3247}$ ....

c) $f(x) = \frac{2x^{10}}{5} - x^3 + \frac{2x^7}{7} - \frac{x^6}{12} + \frac{x^2}{4} + 46$ ....

Calcul 7.5

Pour chacune des questions suivantes, calculer $f'(a)$.

a) $f(x) = 5x^3 + 3x - 2$ et $a = 1 + \sqrt{6}$ ....

b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 1$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ....

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ et $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ....

d) $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ et $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ....

Opérations usuelles et polynômes

On admet que les fonctions de cette partie sont dérivables sur leur domaine de définition, qu'on ne cherchera pas à expliciter, sauf mention contraire.

Calcul 7.6 — Inverses (I).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 4}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x - 2}$ ....

Calcul 7.7 — Inverses (II).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{17}{2}x^2}$ ....

Calcul 7.8 — Quotients (I).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{-5x+4}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{2x-1}$ ....

Calcul 7.9 — Quotients (II).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2}{-x^3 - x}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ ....

Calcul 7.10 — Quotients à simplifier (I).

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} + 3}{2 - \dfrac{3}{x}}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{3 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}}{-2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{-2}{x}}$ ....

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} + 3}{2 - \dfrac{3}{x}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{3 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}}{-2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{-2}{x}}$ ....

Calcul 7.11 — Quotients à simplifier (II).

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x+3}{x-4}}{\dfrac{-x-2}{x^2+x}}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x-1}$ ....

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x+3}{x-4}}{\dfrac{-x-2}{x^2+x}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x-1}$ ....

Calcul 7.12 — Signe de la dérivée.

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
On attend les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

On commencera par déterminer l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{7}x + 2$ .....

b) $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2+1}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5}$ ....

Calcul 7.13 — Dériver puis factoriser (I).

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 9x^2 + 27x - 5}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{x^3}{3} - 64x + 21}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x}$ ....

Calcul 7.14 — Dériver puis factoriser (II).

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{-1}{2x^3 + 6x^2 - 14x + 7}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 3x - 4}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 7.15 — Avec des racines carrées.

Si u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable et on a

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes. On ne cherchera pas à déterminer les ensembles de dérivabilité.

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 10}$ ....

b) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 6x^2 - x + 3}$ ....

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{-3x + 9}}$ ....

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - x}{x^5 - x^2}}$ ....

Calcul 7.16 — Avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dériver les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et $0! = 1$.

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ ....

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ ....

c) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ....

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}$ ....

Calcul 7.17 — Expressions formelles.

Soient f, g et h trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées des fonctions suivantes en fonction de f, g, h et leurs dérivées.

Par exemple, la dérivée de $fg + h$ est $f'g + fg' + h'$.

On pourra utiliser que

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

a) $fg + gh$ .....

b) $\dfrac{f^2}{g}$ ....

c) $\dfrac{f^3 + g}{gh}$ ......

d) $g - \dfrac{f}{h^3}$ ......

e) $f^3 g^2$ ....

f) $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ ....

g) $\sqrt{\dfrac{f}{g}}$ ....

h) fgh ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{(x^3+x)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-11}{(2x-3)^2}$ $\quad$ $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ $\quad$ $108+30\sqrt{6}$

$\dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}$ $\quad$ $3+5\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\quad$ $f'g+fg'+g'h+gh'$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{k-1}$ $\quad$ $[0,+\infty[$ $\quad$ $-\dfrac{23}{4}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\dfrac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}$ $\quad$ $\dfrac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ $\quad$ $\left]-\infty,-\dfrac{8}{5}\right]$ $\quad$ $\dfrac{3x+1}{2x-3}$ $\quad$ $\dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}$

$\dfrac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-3(x-3)^2}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}$ $\quad$ $\dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}$

$\left]\dfrac{9}{10},+\infty\right[$ $\quad$ $4x^9+2x^6-\dfrac{x^5}{2}-3x^2+\dfrac{x}{2}$ $\quad$ $\dfrac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}$ $\quad$ $-\dfrac{69}{25}-2\sqrt{2}$

$\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{3x}{5}$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $\dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}$

$\dfrac{11}{4}$ $\quad$ $\dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}$ $\quad$ $\dfrac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}$ $\quad$ $\dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}$

$\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}$ $\quad$ $g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}$ $\quad$ $\dfrac{23}{(-5x+4)^2}$ $\quad$ $\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}$ $\quad$ $\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

$\dfrac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+2x+8}$ $\quad$ $8x^3+15x^2-2x-6$ $\quad$ $6-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}$

$\dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}$ $\quad$ $\dfrac{13}{2}-\dfrac{13\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$ $\quad$ 1200 $\quad$ $\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

$\dfrac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}$ $\quad$ $\dfrac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}$ $\quad$ $21+16\sqrt{3}$

$3f'f^2g^2+2f^3g'g$ $\quad$ $\left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]$ $\quad$ $f'gh+fg'h+fgh'$ $\quad$ $\left]-\dfrac{4}{45},+\infty\right[$ $\quad$ $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}$

$\dfrac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{5}{2}-2\sqrt{2}$ $\quad$ $\dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}$

$\dfrac{2x+1}{6x^3-2x}$ $\quad$ $35-22\sqrt{2}$ $\quad$ $\dfrac{-3}{(3x+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-6x^2-6x+1}{2(3x^2-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{9}{8}$ $\quad$ $\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}$

► Réponses et corrigés page 180

Dérivation III

Remarque
Dans cette fiche, on ne se préoccupera pas (sauf mention du contraire) des ensembles de définition des fonctions considérées.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 8.1

Écrire sous la forme $ax + by + cz$, où a, b et c sont des réels.

a) $\dfrac{x-y+z}{3} + \dfrac{1}{4}x - 2y$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(x - 3y - z) - \dfrac{x-y-z}{4}$ ....

c) $\dfrac{3x+2y-z}{5} + \dfrac{x+y-2z}{3}$ ....

d) $x - \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{1}{3}(y - x + z)$ ....

Calcul 8.2

Développer et ordonner selon les puissances de x.

a) $(x-1)(x+1) + x(x-2)(2x-1)$ ....

b) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{x+x^2}{2}$ ....

c) $(x-1)(x-2)(x-3) - x^3$ ....

d) $x^2 - \left(2x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ ....

Dérivées de fonctions composées

Calcul 8.3 — Puissances (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (2x-1)^3$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3}-2\right)^4$ ......

c) $f(x) = (1-x)^5$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ....

Calcul 8.4 — Puissances (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^6$ ....

b) $f(x) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}x\right)^3$ ....

c) $f(x) = -\dfrac{1}{\left(3-\frac{x}{2}\right)^3}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^2}$ ....

Calcul 8.5 — Produits de puissances (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (1-2x)^2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2$ ....

b) $f(x) = (2x-1)^2(3x+2)^4$ ....

Calcul 8.6 — Produits de puissances (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x-\sqrt{2})^4(2x+\sqrt{2})^2$ ....

b) $f(x) = \left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^2$ ....

Calcul 8.7 — Quotients (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-3x}$ .....

b) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(2x+1)^2}$ ..

Calcul 8.8 — Quotients (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{(1-2x)^6}{2(1-x)^2}$ ..

b) $\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2}x)^3}{1-\sqrt{2}x}$ .....

Dérivation à partir de relations fondamentales

Calcul 8.9

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et vérifiant, pour tout x réel non nul :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + x.$$

On note, si $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $g(x) = f(2x+1)$ et, si $x \neq 1$, $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ...

b) Calculer $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ...

c) Que vaut $h'(x)$? ...

d) Calculer $h'(1+\sqrt{2})$

Calcul 8.10

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2}.$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = f(2x+1)$ et $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ......

b) Calculer $g'\left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Que vaut $h'(x)$? ......

d) Calculer $h'(2)$. ....

Calcul 8.11

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sqrt{2x^2 + 1}.$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = f\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$ et $h(x) = 2f(2-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ...

b) Calculer $g'(2)$ .....

c) Que vaut $h'(x)$? ...

d) Calculer $h'(0)$. .....

Équations de tangentes

Calcul 8.12 — Des équations de tangentes.

Pour les fonctions f définies par les expressions suivantes, et pour les réels a suivants, donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et $a = 1$ ....

b) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$ ....

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ et $a = 2$ ....

d) $f(x) = (x+2)^3 - (1+x)^2$ et $a = -\dfrac{1}{2}$ ....

Calcul 8.13 — Des ordonnées à l'origine.

Pour les fonctions f définies par les expressions suivantes, et pour les réels a suivants, déterminer l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = (x-1)^2 + (1-x)^3$ et $a = 3$ ....

b) $f(x) = \dfrac{(1-2x)}{(2-x)^2}$ et $a = -1$ ....

c) $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 (2x+1)^2$ et $a = \dfrac{1}{2}$. ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ et $a = \dfrac{1}{3}$ ....

Calculs plus avancés

Notation. Si f est une fonction et si a un réel en lequel f est dérivable, on note $\mathsf{T}_{f,a}$ la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Calcul 8.14 — Intersection de tangentes.

On définit, pour tout x réel, $f(x) = 2(1-x)^3$ et $g(x) = 3(1-x)^2$. Soit a un réel différent de 0 et 1.

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ ....

Calcul 8.15 — Tangente passant par un point donné.

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = 3\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2.$$

Dans chacun des cas suivants, trouver les deux valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\mathsf{T}_{f,a}$ passe par ...

a) le point de coordonnées $(0, 0)$ ....

b) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ....

Calcul 8.16 — Avec un paramètre.

On considère un réel b et, pour x réel, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{(bx)^2 + 1}$.

a) Pour quelles valeurs de b la tangente $\mathsf{T}_{f,2}$ est-elle horizontale ? ....

b) Soit a un réel non nul.

Pour quelle valeur de b (à exprimer éventuellement en fonction de a) la droite $\mathsf{T}_{f,a}$ passe-t-elle par l'origine ?

....

Réponses mélangées

$\frac{7}{12}x-\frac{7}{3}y+\frac{1}{3}z$	$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$	$\frac{6}{(1-2x)^4}$	$-\frac{1}{(1-3x)^2}$	$y=5x-2$	5
$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{6}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^3}$	$4x+\frac{2}{2x+1}+2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$y=\frac{11x}{2}-\frac{11}{2}$
-6	$6(2x-1)^2$	$\frac{-24}{(6-x)^4}$	$(4x-5)(1-2x)\left(1-\frac{x}{2}\right)$	$-6x^2+11x-6$	$\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{6}+\frac{1}{9}$
$x+\frac{1}{x-1}-1$	$\frac{2x-2}{3+(1-x)^2}$	$\frac{5}{3}(2x+7)\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x}{3}+2\right)$	$\frac{4a^2+a+1}{6a}$	$\{-1,2\}$	$4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{15}x+\frac{11}{15}y-\frac{13}{15}z$	$12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})$	20	$-9\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}x\right)^3$	$\frac{3}{2}$
$\frac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}$	$\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{4}z$	$\frac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}$	$\{-2,2\}$	$y=2x-8$	$-\frac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}$
$\frac{1}{2}$	$2x^3-4x^2+2x-1$	$-3x^2+x-\frac{1}{16}$	$-\frac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}$	$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}-2\right)^3$	$-5(1-x)^4$
$\frac{8\sqrt{2}}{11}$	$-\frac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}$	$y=\frac{23x}{4}+6$	0	$\frac{5}{6}x-\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}z$	$12(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^5$
$-2\sqrt{2x^2-8x+9}$					

▶ Réponses et corrigés page 185

Fiche n° 1. Forme canonique

Réponses

1.1 a) $\boxed{4x^2+12x+9}$

1.1 b) $\boxed{9y^2-24y+16}$

1.1 c) $\boxed{u^2-2\sqrt{7}u+7}$

1.1 d) $\boxed{3t^2+6\sqrt{5}t+15}$

1.1 e) $\boxed{\dfrac{9}{4}z^2+6z+4}$

1.1 f) $\boxed{\dfrac{4}{25}v^2-\dfrac{8}{15}v+\dfrac{4}{9}}$

1.2 a) $\boxed{(x-5)(x+5)}$

1.2 b) $\boxed{(2t-3)(2t+3)}$

1.2 c) $\boxed{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

1.2 d) $\boxed{(u+3)^2}$

1.2 e) $\boxed{(3v-2)^2}$

1.2 f) $\boxed{\left(\sqrt{2}z+5\right)^2}$

1.3 a) $\boxed{\{0\}}$

1.3 b) $\boxed{\left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}}$

1.3 c) $\boxed{\{-5\}}$

1.3 d) $\boxed{\left\{\sqrt{2}\right\}}$

1.3 e) $\boxed{\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}}$

1.3 f) $\boxed{\left\{-\dfrac{4\sqrt{5}}{15},\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\right\}}$

1.4 a) $\boxed{X^2-6X+16}$

1.4 b) $\boxed{2X^2+12X+13}$

1.4 c) $\boxed{-X^2-2\sqrt{2}X+4}$

1.4 d) $\boxed{4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}}$

1.4 e) $\boxed{\dfrac{3}{4}X^2+\dfrac{3}{4}X+\dfrac{19}{16}}$

1.4 f) $\boxed{\dfrac{5}{18}X^2+\dfrac{10}{9}X+\dfrac{8}{9}}$

1.5 a) $\boxed{(X+1)^2+1}$

1.5 b) $\boxed{(X+2)^2-5}$

1.6 a) $\boxed{-(X-2)^2-1}$

1.6 b) $\boxed{4(X-1)^2-7}$

1.6 c) $\boxed{-9(X-2)^2+40}$

1.6 d) $\boxed{-2(X+5)^2+33}$

1.7 a) $\boxed{\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2-2}$

1.7 b) $\boxed{\dfrac{1}{4}(X+2)^2-2}$

1.7 c) $\boxed{\dfrac{2}{9}(X+18)^2-\dfrac{503}{7}}$

1.7 d) $\boxed{-\dfrac{9}{8}\left(X+\dfrac{2}{9}\right)^2-\dfrac{71}{18}}$

1.7 e) $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{19}{36}}$

1.7 f) $\boxed{-\dfrac{4}{5}\left(X+\dfrac{25}{48}\right)^2-\dfrac{2\,581}{4\,032}}$

1.8 a) $\boxed{\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\lambda}$

1.8 b) $\boxed{\dfrac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2}$

1.8 c) $\boxed{\lambda\left(X+\dfrac{4}{\lambda}\right)^2-\dfrac{16}{\lambda}+5}$

1.9 a) .... $\boxed{-3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2}$

1.9 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}}$

1.9 c) .... $\boxed{-\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2}$

1.10 .... $\boxed{\text{d}}$

1.11 .... $\boxed{\text{c}}$

1.12 .... $\boxed{\text{a}}$

1.13 .... $\boxed{\text{c}}$

1.14 a) .... $\boxed{\text{vraie}}$

1.14 b) .... $\boxed{\text{fausse}}$

1.14 c) .... $\boxed{\text{fausse}}$

1.14 d) .... $\boxed{\text{vraie}}$

1.15 a) .... $\boxed{\Omega=(1,-2)\text{ et }r=2}$

1.15 b) .... $\boxed{\Omega=(-3,5)\text{ et }r=4}$

1.15 c) .... $\boxed{\Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\text{ et }r=1}$

1.15 d) .... $\boxed{\Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right)\text{ et }r=\sqrt{2}}$

Corrigés

1.1 a) On a $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^3=4x^2+12x+9$.

1.1 b) On a $(3y-4)^2=(3y)^2-2\times 3y\times 4+4^2=9y^2-24y+16$.

1.1 c) On a $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2=(-u)^2+2\times(-u)\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=u^2-2\sqrt{7}u+7$.

1.1 d) On a $\left(-\sqrt{3}t-\sqrt{15}\right)^2=\left(-\sqrt{3}t\right)^2-2\times\left(-\sqrt{3}t\right)\times\sqrt{15}+\left(\sqrt{15}\right)^2=3t^2+6\sqrt{5}t+15$.

1.1 e) On a $\left(\frac{3}{2}z+2\right)^2=\left(\frac{3}{2}z\right)^2+2\times\frac{3}{2}z\times 2+2^2=\frac{9}{4}z^2+6z+4$.

1.1 f) On a $\left(\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{5}v\right)^2-2\times\frac{2}{5}v\times\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}$.

1.2 b) On a $4t^2-9=(2t)^2-3^2=(2t-3)(2t+3)$.

1.2 c) On a $\frac{2}{9}y^2-\frac{4}{5}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

1.2 d) On a $u^2+6u+9=u^2+2\times u\times 3+3^2=(u+3)^2$.

1.2 e) On a $9v^2-12v+4=(3v)^2-2\times 3v\times 2+2^2=(3v-2)^2$.

1.2 f) On a $2z^2+10\sqrt{2}z+25=\left(\sqrt{2}z\right)^2+2\times\sqrt{2}z\times 5+5^2=\left(\sqrt{2}z+5\right)^2$.

1.3 a) On a $x^2=0\iff x=0$.

Fiche n° 6. Dérivation I

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{2^{n+1}}$

6.1 b) .... $\boxed{2^{2n}}$

6.1 c) .... $\boxed{2^{2n+1}}$

6.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}}$

6.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}}}$

6.3 a) .... $\boxed{0}$

6.3 b) .... $\boxed{2}$

6.4 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

6.4 b) .... $\boxed{0}$

6.5 .... $\boxed{\text{c}}$

6.6 .... $\boxed{\text{b}}$

6.7 .... $\boxed{\text{b}}$

6.8 a) .... $\boxed{\sqrt{t^2+y_t^2}}$

6.8 b) .... $\boxed{\sqrt{1-t^2}}$

6.8 c) .... $\boxed{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}$

6.8 d) .. $\boxed{y=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$

6.8 e) .... $\boxed{\vec{w}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\end{pmatrix}}$

6.8 f) .... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix}t\\ y_t\end{pmatrix}}$

6.8 g) .... $\boxed{\text{oui}}$

Corrigés

6.2 a) On a $A(n)=\dfrac{n^2-2n+1}{2n^2+3}=\dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}$.

....

6.2 b) On a $A(n)=\dfrac{n^3-3n^2+1}{n^3-\frac{n^2}{2}+5n}=\dfrac{n^3\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}}$.

....

6.3 a) Le nombre $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2. Par lecture graphique, on a $f'(-2)=0$. En effet, la droite T_2 étant parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est égal à 0.

....

6.3 b) Le nombre $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2. Par lecture graphique, on obtient que le coefficient directeur de la droite T_1 est 2, d'où $f'(2)=2$.

....

6.5 La courbe représentative de la fonction f' nous permet de déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Pour $x\in\,]-\infty,-2]\cup[1,3]$, on a $f'(x)\leqslant 0$ et, pour $x\in[-2,1]\cup[3,+\infty[$, on a $f'(x)\geqslant 0$.

La fonction cherchée est donc croissante sur les intervalles $[-2,1]$ et $[3,+\infty[$ et elle est décroissante sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[1,3]$. C'est donc la fonction f_3.

....

6.6 D'après le tableau de variation de f', on a : pour tout $x\in\,]-\infty,-2]\cup[2,4]$, $f'(x)\leqslant 0$ et, pour tout $x\in[-2,2]\cup[4,+\infty[$, $f'(x)\geqslant 0$. La fonction cherchée est donc croissante sur les intervalles $[-2,2]$ et $[4,+\infty[$ et elle est décroissante sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[2,4]$. C'est donc la fonction f_3.

....

6.8 a) On a $\mathrm{OM}(t)=\sqrt{(t-0)^2+(y_t-0)^2}=\sqrt{t^2+y_t^2}$.

....

6.8 b) Le point $\mathrm{M}(t)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Donc, on a $\mathrm{OM}(t) = 1$. En utilisant l'expression de $\mathrm{OM}(t)$ trouvée à la question précédente, on en déduit que $\sqrt{t^2 + y_t^2} = 1$. D'où $t^2 + y_t^2 = 1$, c'est-à-dire $y_t^2 = 1 - t^2$. Or, par définition, on a $y_t > 0$; donc, on a $y_t = \sqrt{1 - t^2}$.

....

6.8 c) La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $t \in\,]-1, 1[$, on a $f'(t) = \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$.

....

6.8 d) L'équation réduite de T est $y = f'(t)(x - t) + f(t)$, c'est-à-dire : $y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}(x - t) + \sqrt{1-t^2}$.

Ainsi, l'équation réduite de T est $y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

....

6.8 f) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{OM}(t))$.

....

6.8 g) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}$. On calcule

$$t \times 1 + y_t \times \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = t \times 1 + \sqrt{1-t^2} \times \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = t - t = 0.$$

Donc, les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$ sont orthogonaux.

On a montré que la tangente en $M(t)$ au cercle $\mathscr{C}$ est perpendiculaire au rayon $[\mathrm{OM}(t)]$.

....

Fiche n° 7. Dérivation II

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{\left]\dfrac{9}{10},+\infty\right[}$

7.1 b) .... $\boxed{\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[}$

7.1 c) .... $\boxed{\left]-\dfrac{4}{45},+\infty\right[}$

7.1 d) .... $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{8}{5}\right]}$

7.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9}{8}}$

7.2 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

7.2 c) .... $\boxed{1200}$

7.3 a) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

7.3 b) .... $\boxed{6-\dfrac{10}{\sqrt{3}}}$

7.3 c) .... $\boxed{-\dfrac{69}{25}-2\sqrt{2}}$

7.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{23}{4}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}}$

7.3 e) .... $\boxed{\dfrac{13}{2}-\dfrac{13\sqrt{5}}{2}}$

7.3 f) .... $\boxed{35-22\sqrt{2}}$

7.4 a) .... $\boxed{8x^3+15x^2-2x-6}$

7.4 b) .... $\boxed{\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{3x}{5}}$

7.4 c) .... $\boxed{4x^9+2x^6-\dfrac{x^5}{2}-3x^2+\dfrac{x}{2}}$

7.5 a) .... $\boxed{108+30\sqrt{6}}$

7.5 b) .... $\boxed{21+16\sqrt{3}}$

7.5 c) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}-2\sqrt{2}}$

7.5 d) .... $\boxed{3+5\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

7.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-3}{(3x+1)^2}}$

7.6 b) .... $\boxed{\dfrac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}}$

7.6 c) .... $\boxed{\dfrac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}}$

7.7 a) .... $\boxed{\dfrac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}}$

7.7 b) .... $\boxed{\dfrac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}}$

7.8 a) .... $\boxed{\dfrac{23}{(-5x+4)^2}}$

7.8 b) .... $\boxed{\dfrac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}}$

7.9 a) .... $\boxed{\dfrac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{\left(x^3+x\right)^2}}$

7.9 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}}$

7.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3x+1}{2x-3}}$

7.10 b) .... $\boxed{\dfrac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}}$

7.10 c) .... $\boxed{\dfrac{-11}{(2x-3)^2}}$

7.10 d) .... $\boxed{\dfrac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}}$

7.11 a) .... $\boxed{\dfrac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+2x+8}}$

7.11 b) .... $\boxed{\dfrac{2x+1}{6x^3-2x}}$

7.11 c) .... $\boxed{\dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}}$

7.11 d) .... $\boxed{\dfrac{-6x^2-6x+1}{2(3x^2-1)^2}}$

7.12 a) .... $\boxed{\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[}$

7.12 b) .... $\boxed{[0,+\infty[}$

7.12 c) .... $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[}$

7.12 d) .... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]}$

7.13 a) .... $\boxed{\dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}}$

7.13 b) .... $\boxed{\dfrac{-3(x-3)^2}{\left(x^3-9x^2+27x-5\right)^2}}$

7.13 c) .... $\boxed{\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}}$

7.13 d) .... $\boxed{\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}}$

7.14 a) .... $\boxed{\dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}}$

7.14 b) .... $\boxed{\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}}$

7.14 c) .... $\boxed{\dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{\left(2x^3+6x^2-14x+7\right)^2}}$

7.14 d) ...... $\boxed{\dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}}$

7.15 a) .... $\boxed{\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}}$

7.15 b) .... $\boxed{\dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}}$

7.15 c) .... $\boxed{\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}}$

7.15 d) .... $\boxed{\dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}}$

7.16 a) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}}$

7.16 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{k-1}}$

7.16 c) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}}$

7.16 d) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}}$

7.17 a) .... $\boxed{f'g+fg'+g'h+gh'}$

7.17 b) .... $\boxed{\dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}}$

7.17 c) .... $\boxed{\dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}}$

7.17 d) .... $\boxed{g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}}$

7.17 e) .... $\boxed{3f'f^2g^2+2f^3g'g}$

7.17 f) .... $\boxed{\dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}}$

7.17 g) .... $\boxed{\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}}$

7.17 h) .... $\boxed{f'gh+fg'h+fgh'}$

Corrigés

7.2 c) On a $\dfrac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2} = \dfrac{(2^2)^3 \times 3^3 \times 5^4 \times 2^4}{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2} = 3 \times 5^2 \times 2^4 = 1200$.

7.3 d) On a $a^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7.3 f) On a $a = \dfrac{2\sqrt{2} - 4}{2} = \sqrt{2} - 2$, ce qui allège les calculs.

7.4 b) On a $f'(x) = \dfrac{1}{10} \times 5 \times x^4 - \dfrac{5}{12} \times 4x^3 + \dfrac{3}{2} \times 3x^2 - \dfrac{3}{10} \times 2x - 0$.

7.5 a) On a $f'(x) = 15x^2 + 3$.

7.5 b) On a $f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$.

7.5 c) On a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7.5 d) On a $f'(x) = 4x^3 - x + 3$.

7.6 a) On pose $u(x) = 3x + 1$. On a $u'(x) = 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$.

7.6 b) On pose $u(x) = 2x^2 - 3x + 4$. On a $u'(x) = 4x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-(4x-3)}{(2x^2 - 3x + 4)^2}$.

7.8 a) On pose $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = -5x + 4$. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -5$. Donc

$$f'(x) = \frac{2(-5x+4) - (2x+3) \times (-5)}{(-5x+4)^2}.$$

7.9 a) Pour le dénominateur, on a $(-x^3 - x)^2 = (x^3 + x)^2$.

7.10 a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par x.

7.10 b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par x^3.

7.10 d) On trouve $f'(x) = \dfrac{-8x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 4x - 4}{(2x^3 + 2x^2 + 2)^2} = \dfrac{2(-4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 2x - 2)}{4(x^3 + x^2 + 1)^2}$.

7.11 a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $x - 4$ et par $x^2 + x$. On trouve :

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x)}{(x-4)(-x-2)} = \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x}{-x^2 + 2x + 8}.$$

7.11 b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $2x$ et par $x + 2$. On trouve :

$$f(x) = \frac{(x+2) - 2x(-x-2)}{(3x^2 - 1)(2x)(x+2)} = \frac{2x+1}{6x^3 - 2x}.$$

7.12 a) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{7}$.

7.12 b) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{16x}{(x^2+1)^2}$. Or on a $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $16x$.

7.12 c) On a $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ et $f'(x) = \dfrac{35}{6(2x+1)^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{D}_f$.

7.12 d) Étudions $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{5}x + 5$. Le discriminant de cette expression est $\Delta = \dfrac{16}{25} - 10 < 0$; donc, il n'y a pas de racine et $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{5}x + 5 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, $f'(x) = \dfrac{-x + \frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5\right)^2}$. Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $-x + \dfrac{4}{5}$.

7.13 a) On a $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1\right)^2}$: on reconnaît la première identité remarquable.

7.13 b) On a $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 18x - 27}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 5)^2} = \dfrac{-3(x^2 - 6x + 9)}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 5)^2}$. On conclut avec la deuxième identité remarquable.

7.13 c) On a $f'(x) = \dfrac{x^2 - 64}{\left(\frac{x^3}{3} - 64x + 21\right)^2}$. On conclut avec la troisième identité remarquable.

7.13 d) On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9}{\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x\right)^2}$. On conclut avec la première identité remarquable car

$$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{2}x + 3^2 = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2.$$

7.14 a) On a $f'(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{\frac{-1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3}$. Le numérateur est de degré 2. On cherche ses racines. Le discriminant est $\Delta = 9$; il y a donc deux racines : 1 et -2. Ainsi, le numérateur est égal à $(x-1)(x+2)$.

7.14 b) On a $f'(x) = \dfrac{-x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$. Le numérateur est de degré 2 et a pour racines $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{3}{4}$.

7.14 c) On a $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 12x - 14}{(2x^3 + 6x^2 - 14x + 7)^2}$. Le numérateur est égal à $2(3x^2 + 6x - 7)$. On étudie alors $3x^2 + 6x - 7$, qui a pour racines $-1 - \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ et $-1 + \sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

7.14 d) On a $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 + 10x - 3}{\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 3x - 4\right)^2}$. Le numérateur a pour racines $10 - \sqrt{94}$ et $10 + \sqrt{94}$.

7.15 a) On pose $u(x) = 3x^2 - 2x - 10$. On a $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x-1)$. Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x - 10}}$.

7.15 d) On commence par simplifier par x dans la fraction.

7.16 a) Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$. On conclut en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

....

7.16 b) Si $u(x) = (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k}$, alors $u'(x) = (-1)^{k+1} \dfrac{kx^{k-1}}{k}$.

....

7.16 c) Si $u(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ alors $u'(x) = \dfrac{k}{k!} x^{k-1} = \dfrac{k}{1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times k} x^{k-1} = \dfrac{1}{1 \times 2 \times \dots \times (k-1)} x^{k-1}$.

En dérivant f, on trouve donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, ce qui se réécrit en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.

....

7.16 d) Si $u(x) = \dfrac{(3x)^{2k}}{(2k)!} = \dfrac{3^{2k} x^{2k}}{(2k)!}$, alors $u'(x) = 3^{2k} \dfrac{2k}{(2k)!} x^{2k} = \dfrac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

....

7.17 b) La dérivée de f^2 est $2f'f$.

....

7.17 c) La dérivée de $f^3 + g$ est $3f'f^2 + g'$.

....

7.17 d) La dérivée de h^3 est $3h'h^2$.

....

7.17 e) La dérivée de f^3 est $3f'f^2$ et celle de g^2 est $2g'g$.

....

7.17 f) La dérivée de $\dfrac{g}{h}$ est $\dfrac{g'h - gh'}{g^2}$ donc la dérivée de $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ est $\dfrac{f'\frac{g}{h} - f\frac{g'h-gh'}{h^2}}{\left(\frac{g}{h}\right)^2}$. Pour simplifier l'expression, on termine en multipliant par h^2 le numérateur et le dénominateur.

....

7.17 g) La dérivée de $\dfrac{f}{g}$ est $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. On utilise que la dérivée de $\sqrt{u}$ et $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

....

7.17 h) On a $(fgh)' = ((fg)h)' = (f'g + fg')h + fgh'$.

....

Fiche n° 8. Dérivation III

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{\frac{7}{12}x - \frac{7}{3}y + \frac{1}{3}z}$

8.1 b) .... $\boxed{\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y - \frac{1}{4}z}$

8.1 c) .... $\boxed{\frac{14}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{13}{15}z}$

8.1 d) .... $\boxed{\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z}$

8.2 a) .... $\boxed{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}$

8.2 b) .... $\boxed{\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}}$

8.2 c) .... $\boxed{-6x^2 + 11x - 6}$

8.2 d) .... $\boxed{-3x^2 + x - \frac{1}{16}}$

8.3 a) .... $\boxed{6(2x-1)^2}$

8.3 b) .... $\boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} - 2\right)^3}$

8.3 c) .... $\boxed{-5(1-x)^4}$

8.3 d) .... $\boxed{\frac{6}{(1-2x)^4}}$

8.4 a) .... $\boxed{12(\sqrt{3} + \sqrt{2}x)^5}$

8.4 b) .... $\boxed{-9\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{6}x\right)^3}$

8.4 c) .... $\boxed{\frac{-24}{(6-x)^4}}$

8.4 d) .... $\boxed{\frac{6}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}x)^3}}$

8.5 a) .... $\boxed{(4x-5)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)}$

8.5 b) .... $\boxed{4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)}$

8.6 a) .... $\boxed{12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})}$

8.6 b) .... $\boxed{\frac{5}{3}(2x+7)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x}{3} + 2\right)}$

8.7 a) .... $\boxed{-\frac{1}{(1-3x)^2}}$

8.7 b) .... $\boxed{-\frac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}}$

8.8 a) .... $\boxed{-\frac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}}$

8.8 b) .... $\boxed{-\frac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}}$

8.9 a) .... $\boxed{4x + \frac{2}{2x+1} + 2}$

8.9 b) .... $\boxed{5}$

8.9 c) .... $\boxed{x + \frac{1}{x-1} - 1}$

8.9 d) .... $\boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

8.10 a) .... $\boxed{\frac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}}$

8.10 b) .... $\boxed{\frac{8\sqrt{2}}{11}}$

8.10 c) .... $\boxed{\frac{2x-2}{3+(1-x)^2}}$

8.10 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

8.11 a) .... $\boxed{\frac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}}$

8.11 b) .... $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

8.11 c) .... $\boxed{-2\sqrt{2x^2-8x+9}}$

8.11 d) .... $\boxed{-6}$

8.12 a) .... $\boxed{y = 5x - 2}$

8.12 b) .... $\boxed{y = \dfrac{11x}{2} - \dfrac{11}{2}}$

8.12 c) .... $\boxed{y = 2x - 8}$

8.12 d) .... $\boxed{y = \dfrac{23x}{4} + 6}$

8.13 a) .... $\boxed{20}$

8.13 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

8.13 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

8.13 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

8.14 .... $\boxed{\dfrac{4a^2 + a + 1}{6a}}$

8.15 a) .... $\boxed{\{-2, 2\}}$

8.15 b) .... $\boxed{\{-1, 2\}}$

8.16 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}}$

8.16 b) .... $\boxed{0}$

Corrigés

8.4 c) On calcule

$$f'(x) = -\frac{3}{2\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{16\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{2^4\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = \frac{-24}{(6-x)^4}.$$

....

8.5 a) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 2(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 2(1-2x)^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \left(-4\left(1 - \frac{x}{2}\right) - (1-2x)\right)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (-4 + 2x - 1 + 2x)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (4x-5)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

....

8.5 b) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 2(2x-1)(3x+2)^4 + 3 \times 4(2x-1)^2(3x+2)^3 \\ &= (4(3x+2) + 12(2x-1))(2x-1)(3x+2)^3 \\ &= (36x-4)(2x-1)(3x+2)^3 \\ &= 4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1). \end{aligned}$$

....

8.6 a) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})^2 + 2 \times 2(x-\sqrt{2})^4(2x+\sqrt{2}) \\ &= \left(8x + 4\sqrt{2} - 4x + 4\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2}) \\ &= 12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

....

8.6 b) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(6\left(\frac{x}{3} + 2\right) + \frac{2}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right)\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(2x + 12 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \frac{5}{3}(2x + 7)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right). \end{aligned}$$

8.8 a) Déjà, on écrit que $f(x) = \frac{1}{2}(1 - 2x)^6(1 - x)^{-2}$. Ensuite, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times 6 \times (-2)(1 - 2x)^5(1 - x)^{-2} + \frac{1}{2} \times (-2) \times (-1)(1 - 2x)^6(1 - x)^{-3} \\ &= -6(1 - 2x)^5(1 - x)^{-2} + (1 - 2x)^6(1 - x)^{-3} \\ &= (1 - 2x)^5(1 - x)^{-3}(-6(1 - x) + (1 - 2x)) \\ &= (1 - 2x)^5(1 - x)^{-3}(4x - 5). \end{aligned}$$

8.9 a) Soit x un réel non nul tel que $2x + 1$ est non nul. Alors g est dérivable en x et on a

$$g'(x) = 2 \times f'(2x + 1) = 4x + \frac{2}{2x + 1} + 2.$$

8.9 c) Soit x un réel tel que $1 - x \neq 0$. Alors h est dérivable en x et on a

$$h'(x) = -f'(1 - x) = x + \frac{1}{x - 1} - 1.$$

8.11 a) La dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto af'(ax + b)$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} f\left(\frac{x + 1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{(x + 1)^2}{9} + 1} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(x + 1)^2 + 9}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{2(x^2 + 2x + 1) + 9} = \frac{1}{9}\sqrt{2x^2 + 4x + 11}. \end{aligned}$$

8.12 a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x - 1$.

Une équation de la tangente à la courbe de f en 1 est

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3 + 5(x - 1) = 5x - 2.$$

8.13 a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 2(x - 1) - 3(1 - x)^2$.

Donc, la tangente au point d'abscisse 3 a pour équation

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3) = -4 - 8(x - 3) = -8x + 20.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a vaut 20.

8.13 c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)(2x+1)^2 + 2 \times 2 \times \left(1-\frac{x}{2}\right)^2(2x+1) \\ &= \left(-(2x+1) + 4\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)(2x+1) \\ &= (-4x+3)\left(1-\frac{x}{2}\right)(2x+1). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$, on en déduit qu'une équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est

$$y = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{3}{2}$.

....

8.13 d) Si $x \neq -\frac{1}{3}$, on a $f'(x) = \frac{-6}{(3x+1)^2}$. Donc une équation de la tangente en $\frac{1}{3}$ est

$$y = \frac{1}{8} - \frac{6}{8}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{1}{2}$.

....

8.14 On fixe un réel a. Les équations de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ sont

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{f,a} &: y = 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) \\ \mathsf{T}_{g,a} &: y = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a). \end{aligned}$$

Le point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathsf{T}_{f,a}$ et à $\mathsf{T}_{g,a}$ si et seulement s'il vérifie l'équation

$$2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a).$$

On résout cette équation. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a) \\ \iff\ & 6(1-a)(x-a) - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^3 \\ \iff\ & 6(1-a)a(x-a) = (1-a)^2(1+2a) \\ \iff\ & x - a = \frac{(1-a)^2(1+2a)}{6(1-a)a} \qquad \text{(car } a \neq 0 \text{ et } a \neq 1\text{)} \\ \iff\ & x = a + \frac{(1-a)(1+2a)}{6a} = \frac{4a^2+a+1}{6a}. \end{aligned}$$

....

8.15 a) Soit a un réel. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = \frac{3}{2}(a-2)x - \frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right).$$

Cette tangente passe par $(0,0)$ si, et seulement si, $0 = -\frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $a = 2$ ou $a = -2$.

....

8.15 b) La tangente passe par $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ si, et seulement si,

$$0 = \frac{3}{2}(a-2)\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(a^2-4\right),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2)-(a-2)(a+2)=0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2)(-a-1)=0$; ou encore si, et seulement si, $a=2$ ou $a=-1$.

....

8.16 a) On fixe un réel b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(bx)^2+1-x(2xb^2)}{((bx)^2+1)^2} = \frac{1-x^2b^2}{((bx)^2+1)^2}.$$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est

$$y = \frac{2}{4b^2+1} + \frac{1-4b^2}{((b4)^2+1)^2}(x-2).$$

Cette tangente est horizontale si, et seulement si, $1-4b^2=0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $b=\frac{1}{2}$ ou $b=-\frac{1}{2}$.

....

8.16 b) On fixe un réel b et un réel a. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = \frac{a}{a^2b^2+1} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}(x-a) = \frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}x.$$

Cette tangente passe par l'origine si, et seulement si,

$$\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0.$$

Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 &\iff \frac{1}{a^2b^2+1} - \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0\\
&\iff \frac{a^2b^2+1-(1-a^2b^2)}{(a^2b^2+1)^2} = 0\\
&\iff \frac{2a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0\\
&\iff b = 0.
\end{aligned}$$

....