Devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $$\frac{x^2 - 7x + 12}{3x^2 + 3x + 1} > 0$$
2. $$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$
3. $$3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$$

Exercice 2. *Valeur absolue*

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $|x - 4| = 2$
   (b) $|x + 7| < 3$
   (c) $|2x + 4| \leq 6$
   (d) $|3x^2 - |2x + 1|| = 0$.
2. Si x et y sont deux réels, on note $\min\{x, y\}$ et $\max\{x, y\}$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces deux réels. Montrer que :
$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right), \ \max\{x, y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right).$$

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on pose :
$$f_m(x) = x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 (on considère $m = 6$ dans cette partie) :
   (a) Mettre $f_6(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.
   (b) Représenter $\mathcal{C}_{f_6}$ dans un repère orthonormé.
   (c) Donner deux expression simples de $|f_6(x)|$ sans valeur absolue, en précisant le domaine de $\mathbb{R}$ où chacune de ces deux expressions est valable.
2. Résolution de l'équation paramétrique :
$$(E) \ \ x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$
   (a) Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.
   (b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, le nombre de solutions de l'inéquation (E) ci-dessus.

Exercice 4. *Étude de fonction*

On étudie la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x+1}{3x+2}\right).$$

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$:

$$\frac{x+1}{3x+2} > 0.$$

   On notera D_g l'ensemble de ses solutions, qui est le domaine de définition de g.

2. Préciser les limites de g : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} g(x)$.

3. Justifier que g est dérivable sur D_g, et que l'on a :

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{3x^2+5x}{2(3x+2)(x+1)}.$$

4. Réaliser le tableau de variations de g.

Exercice 5. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-x^2+4x-4}{x-1},$$

   on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

   (a) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale.

   (b) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente a un coefficient directeur égal à -2 ?

   (c) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

2. On note f et g les deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2;$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}.$$

   On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.

   (a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

   (b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.

   (c) Conclure.