Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1.
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

Le trinôme $S(x) = x^2 - 7x + 12$ a pour racines 3 et 4 donc on a :

$$S(x) = (x - 3)(x - 4).$$

Le trinôme $U(x) = 3x^2 + 3x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$ donc $U(x)$ ne s'annule pas et est toujours strictement positif.
L'inéquation revient donc à :

$$(x - 3)(x - 4) > 0$$

On en déduit (au moyen d'un tableau de signe par exemple) que l'ensemble des solutions est : $]-\infty, 3[\bigcup]4, +\infty[$

2.
$$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$

On pose $V(X) = X^2 - 4X - 5$. Ce trinôme a pour racines -1 et 5.
Ainsi, les solutions de l'équation sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = -1$ ou $x^2 = 5$. On en déduit qu'il y a exactement deux solutions à l'équation : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

3.
$$3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$$

Cette dernière équation n'a pas pour solution 0, et pour $x \neq 0$, on peut tout diviser par x^2 afin d'obtenir :

$$3x^2 - 16x + 26 - \frac{16}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$$

En posant $u = x + \frac{1}{x}$, on a $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si u vérifie :

$$3(u^2 - 2) - 16u + 26 = 0$$

$$3u^2 - 16u + 20 = 0$$

Les deux solutions de cette dernière équation sont $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{10}{3}$.
Il nous reste, dans chacun des deux cas, à résoudre l'équation $x + \frac{1}{x} = u$, qui équivaut à :

$$x - u + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - ux + 1}{x} = 0$$

$$x^2 - ux + 1 = 0$$

Pour $u = 2$, le discriminant Δ est nul et l'unique solution est $x = 1$.
Pour $u = \frac{10}{3}$, on a deux solutions $x = 3$ ou $x = \frac{1}{3}$.
L'équation admet un ensemble de 3 solutions : $\{\frac{1}{3}\, ,\, 1\, ,\, 3\}$.

Exercice 2. *Valeur absolue*

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

   (a) $|x-4|=2$
   On a donc à résoudre $x-4=2$ ou $x-4=-2$, on en déduit deux solutions $x=6$ ou $x=2$.

   (b) $|x+7|<3$
   $|x+7|=|x-(-7)|$ mesure la distance entre x et -7, on voit donc que l'ensemble des solutions est l'intervalle ouvert $]-10,-4[$.

   (c) $|2x+4|\leq 6$
   Cette équation équivaut à :
   $$|2(x+2)|\leq 6$$
   $$2|x+2|\leq 6$$
   $$|x+2|\leq 3$$
   $|x+2|=|x-(-2)|$ mesure la distance entre x et -2, on voit donc que l'ensemble des solutions est l'intervalle fermé $[-5,1]$.

   (d) $\left|3x^2-|2x+1|\right|=0$.
   Le seul nombre dont la valeur absolue vaut 0 est 0 donc on résout :
   $$3x^2-|2x+1|=0$$
   $$|2x+1|=3x^2$$
   Si $x\in\mathbb{R}$, on a $0\leq 3x^2$ donc cette équation équivaut à $2x+1=3x^2$ ou $2x+1=-3x^2$. La première équation a pour solutions $-\frac{1}{3}$ et 1, la deuxième a un discriminant Δ strictement négatif

2. Si x et y sont deux réels, on note $\min\{x,y\}$ et $\max\{x,y\}$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces deux réels. Montrer que :
   $$\min\{x,y\}=\frac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right),\ \max\{x,y\}=\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right).$$
   On traite deux cas :

   (a) Si $\min\{x,y\}=x$, on a donc $x\leq y$ d'où $0\leq y-x$. En particulier, $|x-y|=|y-x|=y-x$ et ce que l'on doit démontrer est :
   $$x=\frac{1}{2}\left(x+y-(y-x)\right),\ y=\frac{1}{2}\left(x+y+(y-x)\right).$$
   Les deux égalités de l'énoncé sont donc justes dans ce cas.

   (b) Si $\min\{x,y\}=y$, on a donc $y\leq x$ d'où $0\leq x-y$. En particulier, $|x-y|=|y-x|=x-y$ et ce que l'on doit démontrer est :
   $$y=\frac{1}{2}\left(x+y-(x-y)\right),\ x=\frac{1}{2}\left(x+y+(x-y)\right).$$
   Les deux égalités de l'énoncé sont donc justes aussi dans ce cas.

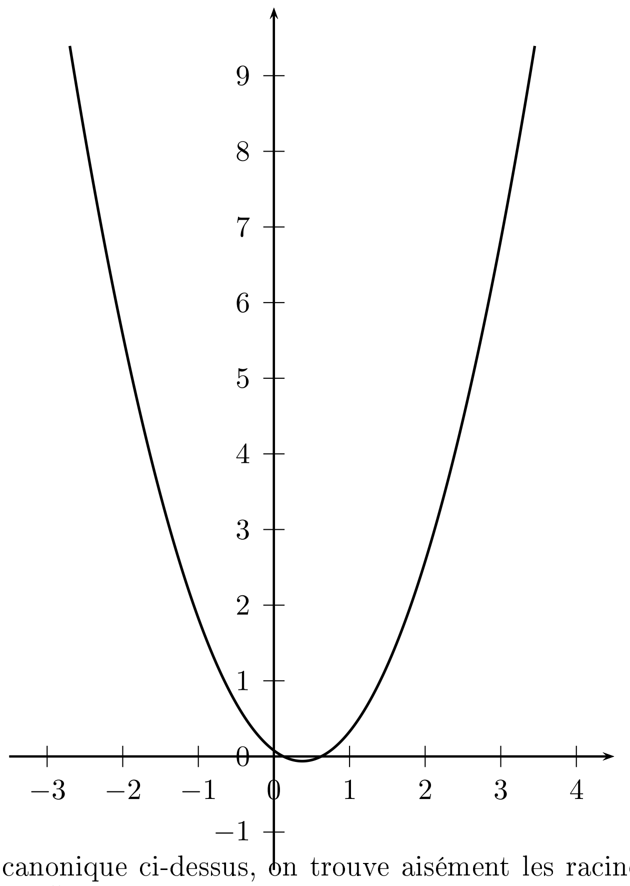
Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, on pose :
$$f_m(x)=x^2-\frac{m}{m+2}x+\frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 :

   (a)
$$f_6(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{64}$$
$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} + \frac{5}{64}$$
$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}$$
   On en déduit les coordonnées $\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.

   (b) Voici la courbe $\mathcal{C}_{f_6}$ tracée dans un repère orthonormé :



   (c) A l'aide de la forme canonique ci-dessus, on trouve aisément les racines du trinôme f_6 : il s'agit de $x_1 = \frac{1}{8}$ et $x_2 = \frac{5}{8}$.
   On en déduit, si $x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right]$, que $f_6(x) \leq 0$ donc $|f_6(x)| = -x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{64}$.
   Si $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right]$, $f_6(x) \geq 0$ et l'on a donc $|f_6(x)| = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{64}$.

2. Résolution de l'équation paramétrique :
$$(E)\ \ x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$

   (a) Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, calculons le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m :
$$\Delta(m) = \frac{m^2}{(m+2)^2} - 4\frac{m+4}{2(m+2)^2}$$
$$\Delta(m) = \frac{m^2 - 2m - 8}{(m+2)^2}$$
   Le trinôme $\phi(m) = m^2 - 2m - 8$ a pour racines $m_1 = -2$ et $m_2 = 4$, on en déduit le tableau de signe de $\Delta(m)$ en fonction de m :

m	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$\Delta(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Du tableau de signe ci-dessus, on déduit :
— si $m \in]-2,4[$, $\Delta(m) < 0$ et l'équation (E) n'a aucune solution ;
— si $m = 4$, $\Delta(4) = 0$ et l'équation (E) a une seule solution ;
— si $m \in]-\infty,-2[\bigcup]4,+\infty[$, $\Delta(m) > 0$ et l'équation (E) a deux solutions.

Exercice 4. *Étude de fonction*

On étudie la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x+1}{3x+2}\right).$$

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$:

$$\frac{x+1}{3x+2} > 0.$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{3x+2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions est donc :

$$D_g =]-\infty,-1[\cup]-\frac{2}{3},+\infty[.$$

2. Préciser les limites de g : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} g(x)$.

On a $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On remarque que $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x+1}{3x+2} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} \dfrac{x+1}{3x+2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} \ln\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} g(x) = +\infty$.

3. Justifier que g est dérivable sur D_g, et que l'on a :

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{3x^2+5x}{2(3x+2)(x+1)}.$$

g est dérivable car la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{3x+2}$ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On calcule alors pour $x \in D_g$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3x+2-3(x+1)}{(3x+2)^2}}{\frac{x+1}{3x+2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{(3x+2)^2}}{\frac{x+1}{3x+2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x+1)(3x+2)}$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)(3x+2)-2}{2(x+1)(3x+2)}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2+5x}{2(3x+2)(x+1)}.$$

4. Pour $x \in D_g$, on a $(3x+2)(x+1) > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $T(x) = 3x^2+5x$. Les deux racines sont $-\frac{5}{3}$ et 0. Ainsi, ce trinôme est de signe négatif pour $x \in [-\frac{5}{3}, 0]$, positif ailleurs.
   On en déduit enfin le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-x^2+4x-4}{x-1},$$

   on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

   (a) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f où la tangente est horizontale.
   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(-2x+4)(x-1)-(-x^2+4x-4)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$$

   La tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale en les points où la dérivée s'annule, c'est à dire pour $x = 0$ ou $x = 2$.

   (b) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2 ?
   Cette question nous amène à résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x \leq -2(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+2 \leq 0$$

   L'inéquation n'a pas de solution x dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc il n'existe aucun point où la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2.

(c) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

La tangente est parallèle à cette droite si et seulement si sa pente vaut $-\frac{2}{3}$, on est donc amené à résoudre :

$$\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x = -\frac{2}{3}(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 3$$

Il y a donc deux telles abscisses : $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$.

2. On note f et g les deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2;$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}.$$

On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.

(a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

$$y = 2ax - a^2$$

(b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.

$$y = g'(b)x + g(b) - bg'(b)$$

$$y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$$

(c) On cherche donc à savoir pour quelles valeurs du couple (a, b) les deux droites dont on a donné les équations ci-dessus sont confondues. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 2a & = & -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 & = & \frac{2}{b} \end{cases}$$

Grâce à la première équation, on remplace a par $-\frac{1}{2b^2}$ dans la deuxième et l'on obtient :

$$-\left(-\frac{1}{2b^2}\right)^2 = \frac{2}{b}$$

$$-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$$

$$-b = 2 \times 4b^4$$

Or ici, $b \neq 0$ car la fonction g n'est pas définie en 0 donc on obtient $b^3 = -\frac{1}{8}$, c'est à dire $b^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$. Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'unique solution est $b = -\frac{1}{2}$ et $a = -2$. L'équation de cette unique tangente commune aux deux courbes est donc :

$$y = -4x - 4.$$