# Fonctions usuelles

**Exercice 1.** *Bijection*

Soit $f : [-1/2, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Montrer que $f$ réalise une bijection sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser ; trouver la fonction réciproque de $f$.

**Exercice 2.** *Positivité*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$.

**Exercice 3.** *Equations et inéquations*

1. Résoudre l'inéquation $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.
2. Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.
3. Résoudre l'équation $5\mathrm{ch}x - 4\mathrm{sh}x = 3$.
4. Résoudre l'équation $\ln(x^2-1) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$.
5. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

**Exercice 4.** *Comparaison de deux composées*

Démontrer que l'on a pour tout réel $x$ :

$$\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$$

Indications : Restreindre l'intervalle d'étude.
Pour $X \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer et utiliser l'inégalité $\sin X < X$.

**Exercice 5.** *Variations et limites d'une fonction*

Faire l'étude complète ( tableau de variations, limites éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$ ) et tracer la courbe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$$

**Exercice 6.** *Minoration de $x^y + y^x$ sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.*

1. Trouver le minimum de $x^x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on notera $m$.
2. Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $0 < y \leq x < 1$. Démontrer que :
$$x^y + y^x \geq m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x}.$$
3. En déduire que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > 1$.
4. Montrer que $1$ est le plus grand réel $A$ tel que :
$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > A.$$

**Exercice 7.** *Simplifier*

Simplifier les expressions suivantes, où l'on a noté $\log_x(y) = \dfrac{\ln y}{\ln x}$ :

$$\mathbf{1}.\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}; \qquad \mathbf{2}.\ \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$$

**Exercice 8.** *Avec des modulos*

Déterminer l'ensemble des solutions $\theta \in \mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

$$3\theta + \pi \equiv 2\theta - \frac{\pi}{3}\left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$
$$3\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{2}$$
$$2(7\theta + \pi) \equiv 5\theta - \pi[4\pi] \tag{3}$$

**Exercice 9.** *Liens entre les différentes fonctions trigonométriques*

1. Si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin x = -\dfrac{3}{5}$, que vaut $\cos x$ ?
2. Si $x \in [0, \pi]$ et que $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, que vaut $\tan x$ ?
3. Si $x \in \mathbb{R}$ et que $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, exprimer $\tan^2 x$ en fonction de $\cos x$, puis en fonction de $\sin x$. Exprimer également dans ce cas $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan x$.

**Exercice 10.** *Équations trigonométriques basiques*

Soit $a \in [0, \pi]$, combien y a-t-il de points $M_\theta$ associés au réel $\theta$ tels que $\cos\theta = \cos a$ ?
Combien y a-t-il de points $M_\theta$ associés au réel $\theta$ tels que $\sin\theta = \sin a$ ?
Combien y a-t-il de points $M_\theta$ associés au réel $\theta$ tels que $\tan\theta = \tan a$ ?
Résoudre les équations suivantes :

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x \tag{1}$$
$$\sin x = \cos(2x) \tag{2}$$
$$\sin x = 2\sin x\cos x \tag{3}$$

**Exercice 11.** *Équations trigonométriques simples*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sqrt{3} \tag{1}$$
$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$
$$\cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{3}$$
$$\cos x(2\cos x + 1) = 1 \tag{4}$$
$$2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0 \tag{5}$$

**Exercice 12.** *Formules de duplication*

1. Pour $a \in [-\pi, \pi]$, exprimer $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)$ en fonction de $\cos a$.

   En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \not\equiv \pi[2\pi]$. On note $t = \tan \dfrac{a}{2}$.
   Rappeler l'expression de $\cos a$ et $\sin a$ en fonction de $t$.
   Si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, en déduire l'expression de $\tan a$ en fonction de $t$.
   Donner enfin la valeur exacte de $\tan \dfrac{\pi}{8}$
3. Déterminer l'ensemble des valeurs $x \in [-\pi, \pi]$ telles que :
$$2\sin x = \sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}$$

**Exercice 13.** *Un exercice d'oral de l'X*

Calculer $X = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
Précision : Si $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est le réel $y$ de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan y = x$.
Indication : A l'aide de formules trigonométriques, commencer par calculer $\tan X$.

**Exercice 14.** *Simplifier*

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$
2. Soit $f$ la fonction définie par
$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
   (b) En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de $f$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$.
   (b) En déduire une forme simplifiée de $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

**Exercice 15.** *Étude de fonctions*

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$. ( Écrire la fonction en utilisant l'exponentielle, déterminer le domaine de définition de $f$, calculer sa dérivée, tracer la fonction. )
2. (a) Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$ ?
   (b) Etudier la fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\exp\big(\arcsin(x)\big)$.
3. On considère la fonction $f$ définie par :
$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de $f$. Préciser la dérivée sur ce dernier ensemble.
   (b) Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative.
   (c) Démontrer que :
$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = 2\text{Arctan}(x).$$
   Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de définition de $f$.

**Exercice 16.** *Une étude de fonction, fonction réciproque*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.
1. Étudier le sens de variation de $f$, ses limites en $\pm\infty$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que la restriction de $f$ à $[-1/2, +\infty[$ admet une fonction réciproque $g$ dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.