Devoir à la maison

Problème

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x+y) \geq f(x) + f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est sur-additive)}, \tag{1}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est multiplicative)}. \tag{2}$$

1. Soit α un réel supérieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $(1+x)^\alpha \geq 1 + x^\alpha$.
   (b) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.
   (c) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
   Justifier que f est solution du problème posé.
2. (a) Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?
   Dans toute la suite du problème, on considère une fonction f non constante qui est solution de celui-ci.
   (b) Montrer que l'on a alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   (c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x^n) = f(x)^n$.
   (d) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
   (e) Prouver enfin que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
   (f) Montrer que f est croissante.
3. On considère encore dans ces dernières questions une fonction f non constante qui est solution du problème.
   (a) Justifier que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.
   (b) Justifier : $\forall x > 0, \exists! q \in \mathbb{Z}$ tel que $2^q \leq x < 2^{q+1}$.
   (c) Soit $x > 0$ un réel et p un entier naturel.
   On convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.
      i. Déterminer la limite du rapport $\frac{q_p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.
      ii. En observant l'encadrement $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$, justifier :
      $$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p+1}{p}.$$
      iii. Si $x \neq 1$, en déduire que $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
   (d) On pose $\alpha = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \geq 1$. Justifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^\alpha.$$