

---

## Programme des colles du 14/10 au 18/10

---

## 1. Fonctions usuelles

- Trigonométrie :
  - Cercle trigonométrique, fonctions cosinus et sinus
  - Angles associés :  $x, \frac{\pi}{2} - x, \pi + x$
  - Congruences et résolution d'équations du type  $\cos x = \cos y$  ou  $\sin x = \sin y$ .
  - Fonction tangente : définition, imparité,  $\pi$ -périodicité, représentation graphique
  - Formules  $\cos(a + b), \cos(a - b), \sin(a + b), \sin(a - b)$
  - Trois formules pour  $\cos(2a)$ , une formule pour  $\sin(2a)$
  - Formules de linéarisation de  $\cos(a)\cos(b), \sin(a)\sin(b), \sin(a)\cos(b)$ .
- Fonctions trigonométriques réciproques
  - Définition de la fonction arcsin, représentation graphique et étude de la dérivabilité.
  - Définition de la fonction arccos, représentation graphique et étude de la dérivabilité.
  - Définition de la fonction arctan, représentation graphique et étude de la dérivabilité.

## 2. Complexes

- Définition, addition et multiplication.
- Formule  $(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1$
- Formule  $(z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}) = z^n - w^n$
- Triangle de Pascal et développement de  $(z + w)^k$  pour  $k$  allant de 1 à 5
- Inverse d'un complexe non nul.
- Conjugaison et propriétés, interprétation géométrique.
- Module d'un complexe, interprétation en termes de distance.
- **Inégalité triangulaire : savoir prouver que pour tous  $z, w \in \mathbb{C}, |z + w| \leq |z| + |w|$ .**  
**Le cas d'égalité est aussi à connaître**
- Pour  $z, w \in \mathbb{C}, ||z| - |w|| \leq |z + w|$ .
- Généralisation à  $n$  complexes  $z_1, z_2, \dots, z_n$  et cas d'égalité :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

- Applications à la trigonométrie
  - Factorisations : angle moitié pour  $1 \pm e^{i\theta}$ , angle moyen pour  $e^{ip} \pm e^{iq}$  et formules pour  $\cos p \pm \cos q,$   
 $\sin p \pm \sin q$ .
  - Formules d'Euler, linéarisation, triangle de Pascal pour le développement de  $(a + b)^n$ .
  - Formule de Moivre.
  - **Sommes trigonométriques à savoir calculer pour  $x \neq 0[2\pi]$  :**

$$C_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \dots + \cos(nx),$$

$$S_n = \sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx).$$

- Représentation trigonométrique et argument d'un complexe non nul.
- Argument d'un produit, d'un quotient.
- Transformation d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  du type  $f : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$  en  
 $f : x \mapsto A \cos(x - \phi)$
- Factorisation par  $(z - \alpha)$  d'une expression polynomiale en  $z$  qui s'annule pour  $z = \alpha$ .
- Racines carrées d'un complexe non nul : sous forme polaire, sous forme algébrique.
- Equation du second degré dans  $\mathbb{C}$ , somme et produit des racines et cas des coefficients réels.
- **Racines  $n$ -ièmes de l'unité : savoir parfaitement la propriété et représenter par un schéma la disposition des racines  $n$ -ièmes de l'unité dans le plan complexe :**

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

NB : il n'est pas obligatoire de connaître la preuve de cette propriété, mais si un étudiant souhaite l'expliquer, cela sera valorisé.

- Caractérisation des racines  $n$ -ièmes de l'unité autres que 1 par  $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$