Corrigé du devoir à la maison

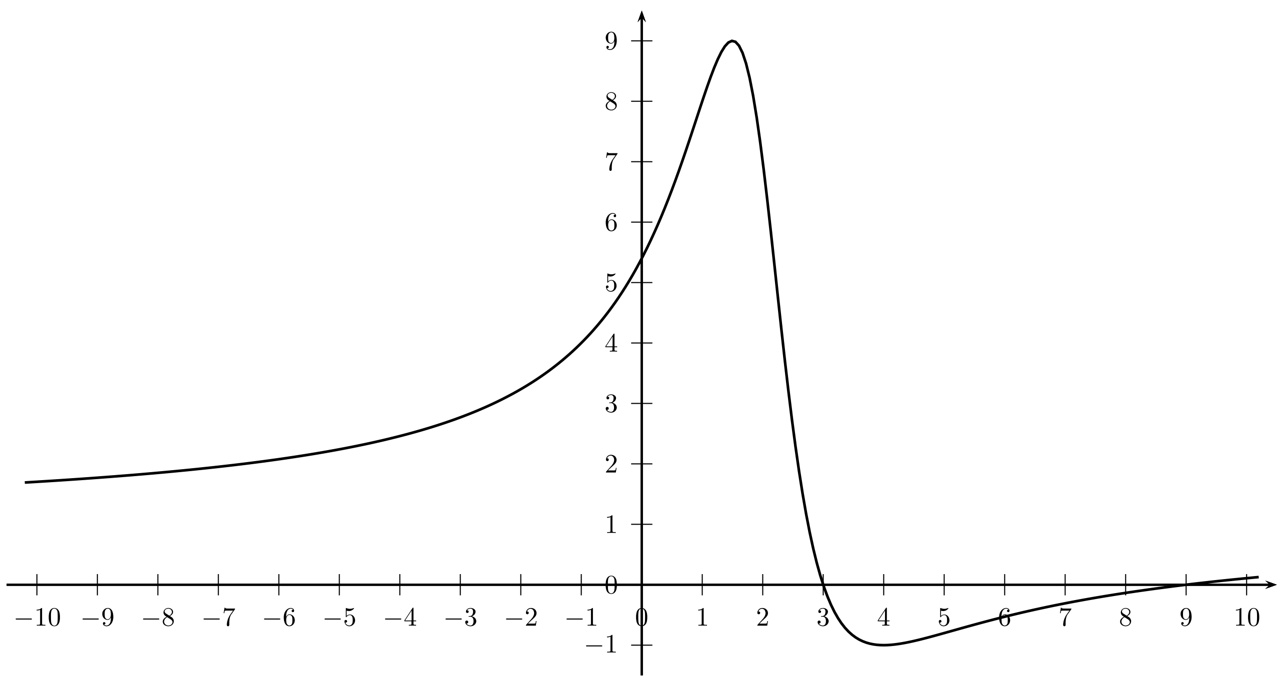
Exercice 1. *Etudes de fonctions*

1. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$$
Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, les limites de f aux bords de D_f, réaliser un tableau de variations.
En calculant le discriminant du trinôme $T(x) = x^2 - 4x + 5$, $\Delta = -4 < 0$, on constate que $T(x)$ ne s'annule pas donc $D_f = \mathbb{R}$.
f est dérivable sur D_f puisque c'est un quotient de polynômes, et l'on a :
$$f'(x) = \frac{4(2x^2 - 11x + 12)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$
On peut aisément calculer le discriminant de $U(x) = 2x^2 - 11x + 12$, $\Delta = 25$, puis en déduire les deux racines $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$ afin de dresser le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$U(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f sont les mêmes que celles de $\frac{x^2}{x^2} = 1$ donc f a pour limite 1 en les deux bords de son domaine de définition. Comme la dérivée $f'(x)$ est du même signe que $U(x)$, on peut enfin réaliser un tableau de variations puis tracer la courbe.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1



2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

— On commence par étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

On remarque que g est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe négatif sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) \leq g(0)$ i.e. $\ln(1+x) - x \leq 0$.
On a démontré la deuxième inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

— On étudie alors la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

On remarque que g est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe positif sur $\mathbb{R}_+$ donc h est croissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $h(0) \leq h(x)$ i.e. $0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
On a démontré la première inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Exercice 2. *Equations*

1. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$.
Les solutions sont les $t \in \mathbb{R}$ tels que : $4t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ donc $t \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
On considère le trinôme $T(X) = 8X^2 - 8X + 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 32$ et les deux racines sont $X_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
L'équation à résoudre équivaut à $T(x^2) = 0$, donc les solutions sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$. On a quatre solutions qui forment l'ensemble :

$$\left\{ \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \; ; -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \; ; \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \; ; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \; ; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \; ; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \; ; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

(c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
On rappelle que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ d'où l'on déduit :

$$\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1$$

$$\cos(4t) = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1$$

$$\cos(4t) = 2(4\cos^4 t - 4\cos^2 t + 1) - 1$$

$$\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

De ceci, on déduit pour $t = \frac{\pi}{8}$ et $t = \frac{3\pi}{8}$, que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sont des solutions de l'équation de la question précédente. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on obtient par stricte décroissance de cos sur $[0, \pi]$:

$$1 > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0.$$

Parmi les quatre solutions de l'équation de la question précédente, seules deux sont positives et l'on déduit finalement des inégalités précédentes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2. Equations trigonométriques.
   Résolvons les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

   Cette équation a donc deux types de solutions : $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$.
   Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ou bien $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 5x &\equiv \frac{2\pi}{3} - x\,[2\pi] & \text{ou } 5x &\equiv -\frac{2\pi}{3} + x\,[2\pi] \\ 6x &\equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] & \text{ou } 4x &\equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \\ x &\equiv \frac{\pi}{9}\,[\frac{\pi}{3}] & \text{ou } x &\equiv -\frac{\pi}{6}\,[\frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \\ \cos(2x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - x\right) \\ \cos(2x) &= \cos(\pi - x) \end{aligned}$$

   On a donc encore une fois deux types de solutions : $2x \equiv \pi - x\,[2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi\,[2\pi]$.
   Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\pi\,[2\pi]$. On remarque que les x qui vérifient la deuxième condition vérifient aussi la première donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 3. *Fonctions trigonométriques réciproques*

1. On note g la fonction définie par :

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$
$$g : x \mapsto \text{Arccos } x + \text{Arcsin } x.$$

   Etudier rapidement la fonction g et en déduire une transformation géométrique qui lie la courbe de Arcsin et celle de Arccos.
   Puisque les fonctions Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1, 1[$, il en est de même de g et l'on a si $x \in\,]-1, 1[$:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, la dérivée de g est nulle sur $]-1,1[$ et g est continue en -1 et en 1. On en déduit que g est constante sur $[-1,1]$.
Comme $g(0)=\frac{\pi}{2}$, on a donc :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x = 2\frac{\pi}{4} - x$$

On en déduit que les courbes des deux fonctions Arccos et Arcsin sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, que f est dérivable sur $]-1,1[$, calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
On prouve d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque Arcsin est définie sur $[-1,1]$, on doit donc vérifier que pour tout x réel, on a :

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Puisque $x^2+1>0$, cette double inégalité équivaut à :

$$-x^2-1 \leq 2x \leq x^2+1$$

La première inégalité équivaut à $0 \leq 2x+x^2+1$ i.e. $0 \leq (x+1)^2$, et la deuxième à $0 \leq x^2+1-2x$ i.e. $0 \leq (x_1)^2$. Les deux inégalités que l'on souhaitait vérifier sont donc justes.
Comme Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, on remarque que les deux inégalités précédentes sont strictes si $x \notin \{-1,1\}$, donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, et en particulier sur $]-1,1[$. On calcule alors pour $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}\text{Arcsin'}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^4-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = 2\text{Arctan}x.$$

On note h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h : x \mapsto f(x) - 2\text{Arctan}(x)$.
h est dérivable, sa dérivée est nulle d'après le calcul précédent. Ainsi, h est une fonction constante. Puisque $h(0)=0$, on en déduit que h est la fonction nulle et le résultat attendu.