Corrigé du devoir à la maison

Problème

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x+y) \geq f(x) + f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est sur-additive)}, \quad (1)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est multiplicative)}. \quad (2)$$

1. Soit α un réel supérieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $(1+x)^\alpha \geq 1 + x^\alpha$.
   On note :
   $$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
   $$h : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha$$
   On remarque que h est dérivable et que l'on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}.$$
   Or $\alpha - 1 \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h'(x) \geq 0$.
   h est donc une fonction croissante, et l'on déduit du fait que $h(0) = 0$ que h est à valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha \geq 0$.
   (b) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.
   Si x ou y vaut 0, cette inégalité est une égalité et est donc vérifiée.
   Si x et y sont différents de 0, on a alors d'après la question précédente appliquée au nombre $\frac{x}{y}$:
   $$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^\alpha \geq 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$
   $$y^\alpha \left(1 + \frac{x}{y}\right)^\alpha \geq y^\alpha \left(1 + \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\right)$$
   $$\left((y(1 + \frac{x}{y})\right)^\alpha \geq y^\alpha + x^\alpha$$
   $$(y+x)^\alpha \geq y^\alpha + x^\alpha$$
   (c) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
   Justifier que f est solution du problème posé.
   D'après la question précédente, f est sur-additive. Or on sait que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$
   On en déduit que f est multiplicative et est donc une solution du problème posé.
2. (a) Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?
   Une fonction constante en la valeur $C \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si $C \geq C + C$ et $C = C^2$.Ces deux conditions signifient respectivement que $C \leq 0$, et que $0 = C(C-1)$. On en déduit que la seule solution constante est la fonction nulle.
   Dans toute la suite du problème, on considère une fonction f non constante qui est solution de celui-ci.

(b) Montrer que l'on a alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On a $f(0 \times 0) = f(0)f(0)$ et $f(0+0) \geq f(0)+f(0)$ d'où l'on déduit d'une part que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, et d'autre part que $f(0) \leq 0$. Ainsi, $f(0) = 0$.
Puisque f n'est pas constante, on a $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \neq 0$.
Alors $f(1 \times x) = f(1)f(x)$ d'où $f(x)(1-f(1)) = 0$ et donc $1-f(1) = 0$ c'est à dire $f(1) = 1$.

(c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x^n) = f(x)^n$.
On le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$, $f(x^1) = f(x) = f(x)^1$ donc la propriété est vraie.
On suppose dorénavant que $f(x^n) = f(x)^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = f(x^n)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}.$$

La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a en effet :

$$f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1)$$
$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

On en déduit que $f(x) \neq 0$ et que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

(e) Prouver enfin que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.

(f) Montrer que f est croissante.
Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Alors on a $y - x \geq 0$ et :

$$f(y) = f(x + (y - x)) \geq f(x) + f(y - x)$$

Or $f(y - x) \in \mathbb{R}_+$ donc $f(x) + f(y - x) \geq f(x)$ et l'on conclut : $f(y) \geq f(x)$.

3. On considère encore dans ces dernières questions une fonction f non constante qui est solution du problème.

(a) Justifier que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.
$\ln(f(2))$ est bien défini car $f(2) \in \mathbb{R}_+^*$ d'après la question 2(d).

$$f(2) = f(1 + 1) \geq f(1) + f(1) = 2$$

Donc on a $f(2) \geq 2$ d'où $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$ par croissance de ln.

(b) Justifier : $\forall x > 0, \exists! q \in \mathbb{Z},\ 2^q \leq x < 2^{q+1}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, cette double inégalité équivaut par stricte croissance de la fonction ln à :

$$q \ln(2) \leq \ln(x) < (q + 1) \ln(2)$$
$$q \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q + 1$$

On sait en effet qu'il existe un unique $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant ceci, il s'appelle la partie entière de $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

(c) Soit $x > 0$ un réel et p un entier naturel.
On convient de noter q_p l'unique entier relatif tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.

i. Déterminer la limite du rapport $\frac{q_p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.
On a en appliquant la fonction ln qui est croissante :

$$\ln(2^{q_p}) \leq \ln(x^p) \leq \ln(2^{q_p+1})$$

$$q_p \ln(2) \leq p \ln(x) \leq (q_p + 1) \ln(2)$$

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leq \frac{(q_p + 1)}{p}$$

La deuxième inégalité nous donne $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p}$ et l'on a donc :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

ii. En observant l'encadrement $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$, justifier :

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p + 1}{p}.$$

L'encadrement observé provient de la croissance de f et sa multiplicativité.
Il suffit de le passer à la fonction ln pour en déduire :

$$q_p \ln(f(2)) \leq p \ln(f(x)) \leq (q_p + 1) \ln(f(2))$$

On en déduit la double inégalité voulue en divisant tout par $p \ln(f(2))$.

iii. Si $x \neq 1$, en déduire que $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
On peut en effet conclure de la question précédente l'encadrement :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}$ lorsque p tend vers $+\infty$ d'où :$\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(\ln(f(2)))} = \dfrac{x}{\ln(2)}$
donc $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

(d) On pose $\alpha = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \geq 1$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^\alpha.$$

On a en effet si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ d'où :

$$\ln(f(x)) = \ln(x^\alpha)$$

et donc $f(x) = x^\alpha$ en passant à l'exponentielle.
Pour $x = 0$, on a bien $f(0) = 0 = 0^\alpha$.