Devoir surveillé

Exercice 1. *Une fonction périodique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$ un réel tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$ et qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2a)$ en fonction de $f(x)$.
2. Montrer que f est une fonction périodique.

Exercice 2. *Minoration de $x^y + y^x$*

1. Déterminer le minimum, que l'on notera m, de la fonction $g : x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient x et y tels que $0 < y \leq x < 1$. Démontrer que :
$$x^y + y^x \geq m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x}.$$
3. En déduire que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, x^y + y^x > 1$.
Indication : Etudier la fonction $f(t) = m^t + mt$ pour $t \in [0,1]$
4. Montrer que l'on ne peut pas remplacer 1 par un nombre strictement plus grand dans la question précédente.

Exercice 3. *Somme de quatre modules*

1. Soients u et v deux complexes, établir l'inégalité :
$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|.$$
Indication : On pourra commencer par trouver a, b des complexes tels que $a+b = u$ et $a-b = v$.
2. Soient x, y, z et t des nombres complexes, prouver que l'on a :
$$|x| + |y| + |z| + |t| \leq |x+y| + |x+z| + |x+t| + |y+z| + |y+t| + |z+t|.$$

Exercice 4. *Inégalité de Ptolémée*

1. Montrer que l'on a pour tous $(a,b) \in {\mathbb{C}^*}^2$:
$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a|\,|b|}.$$
2. Montrer que l'on a pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:
$$|x|\,|y-z| \leq |y|\,|z-x| + |z|\,|x-y|.$$
3. Montrer l'inégalité de Ptolémée :
$$\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4,\ |x-y|\,|z-w| \leq |x-z|\,|y-w| + |x-w|\,|y-z|.$$