Devoir surveillé

Exercice 1. *Une équation fonctionnelle*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer s'il existe $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(R)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) - af(x) = e^x.$$

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $\phi : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-2}$.

1. Etudier les variations de ϕ ainsi que ses limites aux bords de son domaine de définition.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_\phi$ de cette fonction admet deux asymptotes, tracer la courbe de cette fonction et ses deux asymptotes dans un repère orthonormé.
3. On note $\psi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi : x \mapsto \dfrac{3}{x}$. Prouver que $\mathcal{C}_\phi$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_\psi$, préciser le vecteur de la translation.
4. En déduire que le point de coordonnées $(2; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_\phi$.
5. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \phi(x) \neq 2$.
6. Montrer que $\phi : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ est une bijection.
7. Calculer $\phi \circ \phi$, en déduire la bijection réciproque de ϕ.
8. On suppose dans cette question et les suivantes que $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R) explicitée au début de l'énoncé. Montrer que l'on a alors :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, (1-a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}.$$

   Indication : on pourra écrire (R) pour un nombre x et pour le nombre $\phi(x)$.
9. Montrer que pour $a = 1$ ou pour $a = -1$, il n'existe pas de fonction f vérufiant (R).
10. On suppose que $a \notin \{-1; 1\}$.
    (a) Si $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R), montrer que l'on a :

    $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right).$$

    (b) Conclure.

Exercice 2. *Equations*

1. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$ d'inconnue t.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

2. Equations trigonométriques.
   Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \tag{3}$$

Exercice 3. *Fonctions trigonométriques réciproques*

On note g la fonction définie par :

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto \text{Arccos}x + \text{Arcsin}x.$$

Etudier rapidement la fonction g et en déduire une transformation géométrique qui lie la courbe de Arcsin et celle de Arccos.

Exercice 4. *Ensembles de points d'affixes vérifiant une équation*

1. Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 5. *Cosinus et Sinus de* $\frac{\pi}{12}$

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Calculer $z_1\overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.