Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Une équation fonctionnelle*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer s'il existe $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(R)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) - af(x) = e^x.$$

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $\phi : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-2}$.

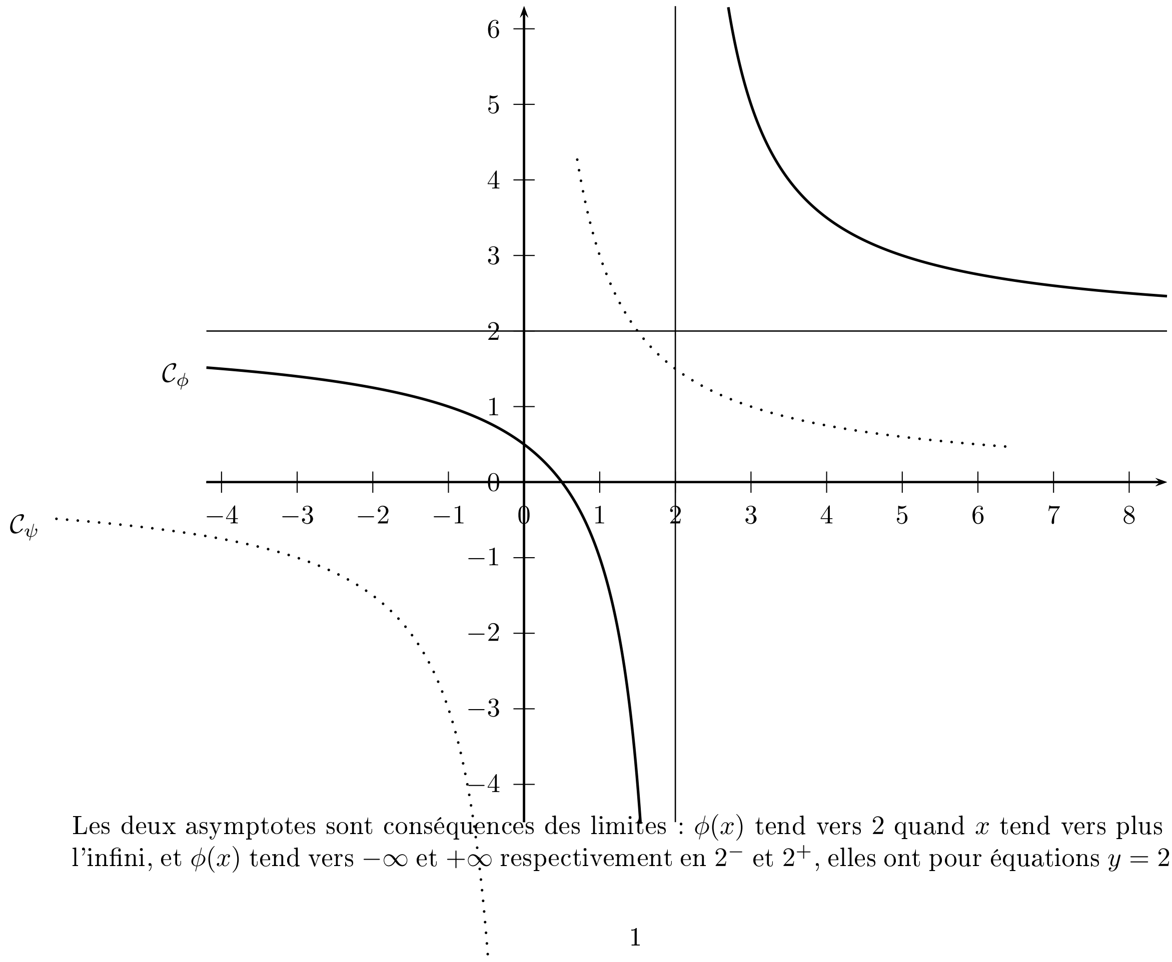
1. Etudier les variations de ϕ ainsi que ses limites aux bords de son domaine de définition.
   ϕ est dérivable et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

   $$\phi'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}.$$

   On en déduit que ϕ est décroissante sur $]-\infty, 2[$ et que ϕ est aussi décroissante sur $]2, +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_\phi$ de cette fonction admet deux asymptotes, tracer la courbe de cette fonction et ses deux asymptotes dans un repère orthonormé.



Les deux asymptotes sont conséquences des limites : $\phi(x)$ tend vers 2 quand x tend vers plus ou moins l'infini, et $\phi(x)$ tend vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement en 2^- et 2^+, elles ont pour équations $y = 2$ et $x = 2$.

3. On note $\psi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi : x \mapsto \dfrac{3}{x}$. Prouver que $\mathcal{C}_\phi$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_\psi$, préciser le vecteur de la translation.
   Le vecteur de la translation est $(2, 2)$. En effet, si l'on calcule :
$$\psi(x-2)+2 = \frac{3}{x-2}+2$$
$$\psi(x-2)+2 = \frac{3+2(x-2)}{x-2}$$
$$\psi(x-2)+2 = \frac{2x-1}{x-2}$$
$$\phi(x) = \psi(x-2)+2.$$
   Ceci nous assure que $\mathcal{C}_\phi$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_\psi$ selon le vecteur $(2, 2)$.
4. Montrer que le point de coordonnées $(2; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_\phi$.
   La fonction ψ est clairement impaire donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine du repère, on en déduit que $\mathcal{C}_\phi$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(2; 2)$ puisque ce point est l'image de l'origine du repère par la translation de vecteur $(2; 2)$.
5. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 2$. On résout, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:
$$\phi(x) = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-2(x-2)}{x-2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = 0$$
   Cette dernière équation n'a pas de soulution donc on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 2$.
6. Montrer que $\phi : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ est une bijection.
   Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on cherche ses antécédents $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ en résolvant l'équation :
$$\phi(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} = y$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-y(x-2)}{x-2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x-1-yx+2y = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-y)x = 1-2y$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{2-y}$$
   y admet donc un unique antécédent, dont il faut vérifier qu'il ne peut être égal à 2. Résolvons à cette fin l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:
$$\frac{1-2y}{2-y} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-2y-2(2-y)}{2-y} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1-2y-4+2y = 0$$
$$\Leftrightarrow -3 = 0$$

7. Calculer $\phi \circ \phi$, en déduire la fonction réciproque de ϕ.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, calculons :

$$\phi(\phi(x)) = \frac{2\phi(x) - 1}{\phi(x) - 2}$$

$$\phi(\phi(x)) = \frac{2\frac{2x-1}{x-2} - 1}{\frac{2x-1}{x-2} - 2}$$

$$\phi(\phi(x)) = \frac{\frac{4x-2-(x-2)}{x-2}}{\frac{2x-1-2(x-2)}{x-2}}$$

$$\phi(\phi(x)) = \frac{3x}{3}$$

$$\phi \circ \phi(x) = x.$$

On en déduit que $\phi^{-1} = \phi$, ϕ est sa propre réciproque puisque l'antécédent d'un $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ donné est $\phi(x)$.

8. On suppose dans cette question et les suivantes que $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R) explicitée au début de l'énoncé. Montrer que l'on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, (1 - a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a en effet :

$$(1)\ f(\phi(x)) - af(x) = e^x$$

La relation (R) est encore vraie si l'on remplace x par $\phi(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(\phi(\phi(x))) - af(\phi(x)) = e^{\phi(x)}$$

$$(2)\ f(x) - af(\phi(x)) = e^{\phi(x)}$$

On obtient en ajoutant a fois (1) et (2) :

$$a\left(f(\phi(x)) - af(x)\right) + f(x) - af(\phi(x)) = ae^x + e^{\phi(x)}$$

$$(1 - a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}.$$

9. Montrer que pour $a = 1$ ou pour $a = -1$, il n'existe pas de fonction f vérifiant (R).
Pour $a = 1$, on aurait $0 = e^x + e^{\phi(x)}$ ce qui est impossible car une somme de deux exponentielles est strictement positive.
Pour $a = -1$, on aurait pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: $0 = -e^x + e^{\phi(x)}$ i.e. $e^{\phi(x)} = e^x$. On en déduit par injectivité de l'exponentielle que $\phi(x) = x$. Mais ceci est faux par exemple pour $x = 0$ donc la relation (R) ne peut être vérifiée.

10. On suppose que $a \notin \{-1; 1\}$.
   (a) Si $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R), montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{1}{1 - a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right).$$

   Ceci est une conséquence naturelle de la relation obtenue à la question 8.

   (b) Conclure.
   Il faut vérifier la réciproque, c'est à dire que si f est définie par $f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, alors on a :

$$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{1}{1 - a^2}\left(ae^{\phi(x)} + e^{\phi(\phi(x))}\right) - a\left(\frac{1}{1 - a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right)\right)$$

$$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{ae^{\phi(x)} + e^x - a^2e^x - ae^{\phi(x)}}{1 - a^2}$$

$$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{(1 - a^2)e^x}{1 - a^2}$$

$$f(\phi(x)) - af(x) = e^x.$$

   La fonction f est donc l'unique fonction qui vérifie (R).

Exercice 2. *Equations*

1. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$.
   Les solutions sont les $t \in \mathbb{R}$ tels que : $4t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ donc $t \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
   On considère le trinôme $T(X) = 8X^2 - 8X + 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 32$ et les deux racines sont $X_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
   L'équation à résoudre équivaut à $T(x^2) = 0$, donc les solutions sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$. On a quatre solutions qui forment l'ensemble :

$$\left\{ \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \; ; \; -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \; ; \; \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \; ; \; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \; ; \; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \; ; \; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \; ; \; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

   (c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
   On rappelle que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ d'où l'on déduit :

$$\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1$$

$$\cos(4t) = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1$$
$$\cos(4t) = 2(4\cos^4 t - 4\cos^2 t + 1) - 1$$
$$\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

   De ceci, on déduit pour $t = \frac{\pi}{8}$ et $t = \frac{3\pi}{8}$, que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sont des solutions de l'équation de la question précédente. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on obtient par stricte décroissance de cos sur $[0, \pi]$:

$$1 > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0.$$

   Parmi les quatre solutions de l'équation de la question précédente, seules deux sont positives et l'on déduit finalement des inégalités précédentes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2. Equations trigonométriques.
   Résolvons les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

   Cette équation a donc deux types de solutions : $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$.
   Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ou bien $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
5x &\equiv \frac{2\pi}{3} - x\,[2\pi] & \text{ou } 5x &\equiv -\frac{2\pi}{3} + x\,[2\pi]\\
6x &\equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] & \text{ou } 4x &\equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]\\
x &\equiv \frac{\pi}{9}\,[\frac{\pi}{3}] & \text{ou } x &\equiv -\frac{\pi}{6}\,[\frac{\pi}{2}]
\end{aligned}
$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(2x) &= -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\\
\cos(2x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - x\right)\\
\cos(2x) &= \cos(\pi - x)
\end{aligned}
$$

On a donc encore une fois deux types de solutions : $2x \equiv \pi - x\,[2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi\,[2\pi]$.
Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\pi\,[2\pi]$. On remarque que les x qui vérifient la deuxième condition vérifient aussi la première donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 3. *Fonctions trigonométriques réciproques*

On note g la fonction définie par :

$$
\begin{gathered}
g : [-1,1] \to \mathbb{R}\\
g : x \mapsto \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x.
\end{gathered}
$$

Etudier rapidement la fonction g et en déduire une transformation géométrique qui lie la courbe de Arcsin et celle de Arccos.
Puisque les fonctions Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1,1[$, il en est de même de g et l'on a si $x \in]-1,1[$:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, la dérivée de g est nulle sur $]-1,1[$ et g est continue en -1 et en 1. On en déduit que g est constante sur $[-1,1]$.
Comme $g(0) = \frac{\pi}{2}$, on a donc :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [-1,1],\quad \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x &= \frac{\pi}{2}\\
\forall x \in [-1,1],\quad \text{Arccos}\, x &= \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x\\
\forall x \in [-1,1],\quad \text{Arccos}\, x &= 2\frac{\pi}{4} - \text{Arcsin}\, x
\end{aligned}
$$

On en déduit que les courbes des deux fonctions Arccos et Arcsin sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. *Ensembles de points d'affixes vérifiant une équation*

1. Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

On a en effet :

$$
\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\\
\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} &\iff (1+z)(1-\bar{z}) = -(1+\bar{z})(1-z)\\
\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} &\iff 1 + z - \bar{z} - \bar{z}z = -1 + z - \bar{z} + \bar{z}z\\
\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} &\iff 2 = 2\bar{z}z\\
\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} &\iff |z| = 1
\end{aligned}
$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.
   On a en effet puisqu'un module est toujours positif :

$$|z-i| = |z+i| \iff |z-i|^2 = |z+i|^2$$

$$|z-i| = |z+i| \iff (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1$$

$$|z-i| = |z+i| \iff 2i(z-\bar{z}) = 0$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z - \bar{z} = 0$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

Exercice 5. *Cosinus et Sinus de* $\frac{\pi}{12}$

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Calculer $z_1\overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

$$z_1\overline{z_2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1\overline{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1\overline{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$