Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Une fonction périodique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$ un réel tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$ et qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2a)$ en fonction de $f(x)$. Là il faut utiliser le fait que $x + 2a = (x+a)+a$.

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}.$$

$$f(x+2a) = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}.$$

$$f(x+2a) = \frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-1-f(x)}.$$

$$f(x+2a) = -\frac{1}{f(x)}.$$

2. Montrer que f est une fonction périodique. On recommence avec $x + 4a = x + 2a + 2a$:

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)}.$$

$$f(x+4a) = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}.$$

$$f(x+4a) = f(x)$$

Et f est donc périodique de période $4a$.

Exercice 2. *Minoration de $x^y + y^x$*

1. Déterminer le minimum, que l'on notera m, de la fonction $g : x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = e^{x \ln x}$$

On en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = (\ln x + x\frac{1}{x})e^{x \ln x}$$

On en déduit que $g'(x)$ est du même signe que $\ln x + 1$, soit négative sur $]0, e^{-1}]$ puis positive sur $[e^{-1}, +\infty[$. Cette fonction atteint donc son minimum en e^{-1} et celui-ci vaut :

$$m = g(e^{-1})$$

$$m = e^{-e^{-1}}$$

2. Soient x et y tels que $0 < y \leq x < 1$. Démontrer que :
$$x^y + y^x \geq m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x}.$$
On commence par remarquer que $x^y = (x^x)^{\frac{y}{x}}$ d'où l'on déduit par croissance de la fonction $t \mapsto t^{\frac{y}{x}}$ puisque $m \leq x^x$:
$$m^{\frac{y}{x}} \leq (x^x)^{\frac{y}{x}}$$
$$(1) \quad m^{\frac{y}{x}} \leq x^y$$
Ensuite, on part de l'inégalité :
$$m \leq x^x$$
On en déduit en multipliant par l'inverse de x :
$$\frac{m}{x} \leq x^{x-1}$$
Or $x - 1 < 0$ donc la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est strictement décroissante et l'on en déduit puisque $y \leq x$:
$$x^{x-1} \leq y^{x-1}$$
De ces deux inégalités, on déduit alors :
$$\frac{m}{x} \leq y^{x-1}$$
Et l'on multiplie ceci par y pour obtenir :
$$(2) \quad m\frac{y}{x} \leq y^x$$
Il ne reste plus qu'à ajouter les deux inégalités (1) et (2) pour obtenir l'inégalité demandée.
3. En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, x^y + y^x > 1$.
On traite d'abord le cas où les deux réels x et y sont strictement inférieurs à 1. Quitte à échanger x et y, ce qui ne change rien à l'inégalité à prouver, on suppose également que $y \leq x$.
Suivant l'indication, on étudie la fonction $f(t) = m^t + mt$ pour $t \in [0, 1]$:
$$f(t) = e^{t \ln m} + mt$$
Cette fonction est dérivable de dérivée :
$$f'(t) = \ln m e^{t \ln m} + m$$
$$f'(t) = -e^{-1}e^{-e^{-1}t} + e^{-e^{-1}}$$
$$f'(t) = -e^{-1-e^{-1}t} + e^{-e^{-1}}$$
Or $1 < e$ d'où $e^{-1} < 1$ i.e. $-1 < -e^{-1}$.
A fortiori, pour $t \in [0, 1]$: $-1 - e^{-1}t < -e^{-1}$ donc :
$$e^{-1-e^{-1}t} < e^{-e^{-1}}$$
On en déduit que $0 < f'(t)$ donc la fonction f est strictement croissante d'où :
$$f(0) < f\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$1 < f\left(\frac{y}{x}\right)$$
Puisque l'inégalité prouvée à la question précédente signifie :
$$f\left(\frac{y}{x}\right) \leq x^y + y^x,$$
on a bien prouvé que $1 < x^y + y^x$.
Dans les cas où x ou y est plus grand ou égal à 1, on a respectivement $1 = 1^y \leq x^y$ ou $1 = 1^x \leq y^x$ donc l'inégalité précedente est encore vraie.

4. Montrer que l'on ne peut pas remplacer 1 par un nombre strictement plus grand dans la question précédente.
   Pour $y = 1$, on a donc :
$$x^y + y^x = x + 1$$
   Ceci tend vers 1 quand x tend vers 0, donc $x^y + y^x$ ne peut pas être minoré par un nombre strictement plus grand que 1.

Exercice 3. *Somme de quatre modules*

1. Soient u et v deux réels, établir l'inégalité :
$$|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|.$$
   Suivant l'indication, on trouve que $a = \frac{1}{2}(u + v)$ et $b = \frac{1}{2}(u - v)$ sont tels que $u = a + b$ et $v = a - b$.
   Or on sait d'après l'inégalité triangulaire que :
$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1}$$
$$|a - b| \leq |a| + |-b| \tag{2}$$
   De ces deux inégalités, on déduit en les ajoutant :
$$|a + b| + |a - b| \leq 2|a| + 2|b|.$$
$$|u| + |v| \leq 2\left|\frac{1}{2}(u + v)\right| + 2\left|\frac{1}{2}(u - v)\right|.$$
$$|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|.$$
2. Soient x, y, z et t des nombres réels, prouver que l'on a :
$$|x| + |y| + |z| + |t| \leq |x + y| + |x + z| + |x + t| + |y + z| + |y + t| + |z + t|.$$
   D'après l'inégalité précédente appliquée à x et y ou à z et t , on a :
$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$
$$|z| + |t| \leq |z + t| + |z - t|$$
   On en déduit que :
$$(J)\ |x| + |y| + |z| + |t| \leq |x + y| + |z + t| + |x - y| + |z - t|.$$
   On applique alors l'inégalité démontrée dans la première question à $(x - y)$ et $(z - t)$:
$$|x - y| + |z - t| \leq |(x - y) + (z - t)| + |(x - y) - (z - t)|;$$
$$|x - y| + |z - t| \leq |(x + z) - (y + t)| + |(x + t) - (y + z)|.$$
   Or l'inégalité triangulaire nous assure que :
$$|(x + z) - (y + t)| \leq |x + z| + |y + t| \tag{3}$$
$$|(x + t) - (y + z)| \leq |x + t| + |y + z| \tag{4}$$
   On déduit de ces deux dernières inégalités que :
$$|(x + z) - (y + t)| + |(x + t) - (y + z)| \leq |x + z| + |y + t| + |x + t| + |y + z|.$$
   Avec cette inégalité et (J), on obtient enfin :
$$|x| + |y| + |z| + |t| \leq |x + y| + |z + t| + |x + z| + |y + t| + |x + t| + |y + z|.$$

Exercice 4. *Inégalité de Ptolémée*

1. Montrer que l'on a pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^{*2}$:

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a|\,|b|}.$$

On calcule d'abord :

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right|^2 = \left(\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right) \left(\frac{\bar{a}}{|a|^2} - \frac{\bar{b}}{|b|^2} \right)$$

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right|^2 = \frac{|a|^2}{|a|^4} + \frac{|b|^2}{|b|^4} - \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{|a|^2|b|^2}$$

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right|^2 = \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|b|^2} - \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{|a|^2|b|^2}$$

Puis on calcule :

$$\left(\frac{|a-b|}{|a|\,|b|} \right)^2 = \frac{(a-b)(\bar{a} - \bar{b}}{|a|^2|b|^2}$$

$$\left(\frac{|a-b|}{|a|\,|b|} \right)^2 = \frac{|a|^2 + |b|^2 - b\bar{a} - a\bar{b}}{|a|^2|b|^2}$$

$$\left(\frac{|a-b|}{|a|\,|b|} \right)^2 = \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|b|^2} - \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{|a|^2|b|^2}$$

Ainsi, les carrés des deux nombres positifs que l'on étudie sont égaux, donc ces deux nombres sont égaux.

2. Montrer que l'on a pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$|x|\,|y - z| \leq |y|\,|z - x| + |z|\,|x - y|.$$

Calculons :

$$|x|\,|y-z| = |x(y-z)| = |xy - xz| = |xy - zy + yz - xz| = |(x-z)y + (y-x)z|$$

Or on a par inégalité triangulaire :

$$|(x-z)y + (y-x)z| \leq |(x-z)y| + |(y-x)z|$$

et il ne reste plus qu'à écrire $|(x-z)y| = |y||z-x|$ et $|(y-x)z| = |z||x-y|$ pour conclure.

3. Montrer l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4,\ |x-y|\,|z-w| \leq |x-z|\,|y-w| + |x-w|\,|y-z|.$$

On applique l'inégalité précédente avec $x' = x - y$, $y' = w - y$ et $z' = z - y$:

$$|x-y|\,|w-y-(z-y)| \leq |w-y|\,|z-y-(x-y)| + |z-y|\,|x-y-(w-y)|.$$

$$|x-y|\,|w-z| \leq |w-y|\,|z-x| + |z-y|\,|x-w|.$$