Intégrales et équations différentielles

1 Intégrales

Exercice 1. *Avec un trinôme au dénominateur*

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

3. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$ **4.** $x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

Indications :

1. Commencer par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.
2. Procéder comme dans l'exemple du cours (forme canonique puis changement de variable).
3. Faire la division du numérateur par le dénominateur.
4. Écrire comme somme de $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

Exercice 2. *Quelques fractions rationnelles*

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ **3.** $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$

Indication pour le 2 : Trouver (a,b,c) tels que $\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

Exercice 3. *Calculs*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$,
3. $x \mapsto x^2 \sin x$ sur $\mathbb{R}$,
4. $x \mapsto e^{2x} \sin x$ sur $\mathbb{R}$,
5. $x \mapsto e^{-x} \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$,
7. $x \mapsto x^3 e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$,
8. $x \mapsto e^{2x} \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$,
9. $x \mapsto \cos(3x)\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$,
10. $x \mapsto \sin^4 x$ sur $\mathbb{R}$,
11. $x \mapsto x^2 e^x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

12. $x \mapsto x\sqrt{3-x}$ sur $]-\infty, 3]$,
13. $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(x)}$ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 4. *Avec l'exponentielle et des fonctions trigonométriques*

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.} \quad I = \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx \qquad \textbf{2.} \quad J = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx.$$

Exercice 5. *Primitives par intégrations par parties*

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\textbf{1.} \quad x \mapsto \arctan(x) \qquad \textbf{2.} \quad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad \textbf{3.} x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice 6. *Calcul d'intégrales*

Calculer les intégrales suivantes, où $a > 0$ est un paramètre :

$$\textbf{1.} \quad I = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \qquad \textbf{2.} \quad J(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}.$$

Indication :

1. Intégrer par parties (deux fois). Un bon choix d'une primitive peut simplifier les calculs.
2. Intégrer par parties entre $a > 0$ et 1 en dérivant le logarithme, et utiliser la formule

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Exercice 7. *Premiers exemples de changement de variable*

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.} \quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \qquad \textbf{2.} \quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Indication :

1. Poser $u = \sqrt{t}$.
2. Poser $u = e^x$.

Exercice 8. *Changements de variables*

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.} \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx, \ n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{2.} \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t+1}}$$

Indication :

1. Poser $u = \ln x$.
2. Poser $u = \sqrt{e^t+1}$.

Exercice 9. *Changements de variables naturels*

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}. \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x} \qquad \mathbf{2}. \quad x \mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Indication :

1. Poser $u = \ln x$.
2. Poser $u = \sqrt{x}$.

Exercice 10. *Changement de variable dans une fraction rationnelle trigonométrique*

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1}. \ \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t} dt \qquad \mathbf{2}. \ \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t} \qquad \mathbf{3}. \ \int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(t)\big)\tan(t)dt.$$

Indication : Faire le changement de variables $u = \cos(t)$.

Exercice 11. *Une première suite d'intégrales*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Indication : effectuer une intégration par parties, et manipuler.

Exercice 12. *Une deuxième suite d'intégrales*

1. Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

   $$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt.$$

   Indication : faire n intégrations par parties successives.
2. Pour (n, p) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

   $$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx.$$

   Calculer $I_{n,p}$.
   Indication : par une intégration par parties, établir une formule de récurrence reliant $I_{n,p}$ à $I_{n,p-1}$ (attention à la borne 0 !). Puis trouver la formule générale pour $I_{n,p}$.

2 Equations différentielles

Exercice 13. *Equations linéaires à coefficients constants*

1. Résoudre les équations linéaires homogènes à coefficients constants suivantes, et préciser dans chaque cas la solution qui vérifie $y(2) = -1$:
   (a) $y' + 2y = 0$,
   (b) $y' - 3y = 0$.
2. Résoudre les équations linéaires à coefficients constants suivantes à l'aide d'une solution particulière :
   (a) $y' + 2y = e^t$: on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha e^t$,
   (b) $y' - 3y = 2e^{3t}$: on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \beta t e^{3t}$.

Exercice 14. *Premiers exemples de variation de la constante*

Résoudre les équations différentielles suivantes. Comme on ne précise pas sous quelle forme chercher une solution particulière, il pourra être judicieux d'utiliser la méthode de variation de la constante. Préciser enfin la solution réelle qui vérifie $y(1) = -2$.

1. $y' + 2y = \sin t$: préciser l'ensemble des solutions à valeurs complexes, et l'ensemble des solutions réelles ;
2. $y' - 3y = (t^2 + 1)e^{3t}$,
3. $y' + 5y = \ln(t)^2 e^{-5t}$,
4. $y' = \cos t + y$.

Exercice 15. *Autres exemples de variation de la constante*

1. Déterminer l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y' - 2y = 2t + 1.$$
2. Trouver la solution $y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 1$ de l'équation différentielle :
$$y' + \tan(t)y = \sin(2t).$$
3. Résoudre l'équation :
$$-t\ln(t)y' + 2y = \ln^3(t)$$
   NB : on pensera à préciser l'intervalle de résolution de l'équation.
   Indication : pour trouver une primitive de $u \longmapsto \dfrac{1}{u\ln(u)}$, on pourra intégrer cette quantité entre 1 et t puis utiliser le changement de variable $x = \ln(u)$.

Exercice 16. *Application directe du cours*

Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = e^t$,
2. $y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$,
3. $4y'' + 4y' + 17y = \cos t$

Préciser enfin, pour chacune des équations précédentes, la solution qui vérifie $y(1) = 1$ et $y'(1) = 1$.

Exercice 17. *Analyse qualitative d'une équation*

A quelle condition portant sur les complexes a et b l'équation $y'' + ay' + by = 0$ n'a-t-elle que des solutions bornées sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$).
Rappel : on dit qu'une fonction y est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|y(t)| \leq M$.
Indication : bien exploiter la propriété de factorisation par les racines des polynômes du second degré, et procéder par analyse synthèse.

Exercice 18.

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose que (E) possède une unique solution f de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et qu'il existe une solution g vérifiant $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$.
Trouver (a, b, c), puis donner l'ensemble des solutions.

Exercice 19.

On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ c'est-à-dire en cherchant une solution de la forme $y(x) = z(\sqrt{x})$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 20.

Trouver les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + \int_0^x (x - t)\, f(t)\, dt = 1.$$

Exercice 21.

Résoudre

$$(1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = 0.$$

Indication : poser $y(x) = e^x z(x)$.

Exercice 22.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Résoudre

$$y'' - 2\lambda y' + 2\lambda y = e^{-\lambda x} \cos(\lambda x).$$