Devoir à la maison

Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \mathrm{dt}.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
   $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ \mathrm{dt} = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on linéarise ensuite $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$ pour calculer :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2} \ \mathrm{dt}$$

$$I_2 = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$

2. Prouver que l'on a pour tout n :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

   Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t$.
   Suivant l'indication, on obtient :

$$I_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)(n+1)\cos^n t \ \mathrm{dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \ \mathrm{dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \ \mathrm{dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$

   D'après les valeurs de I_0 et I_1, on vérifie immédiatement que la propriété est vraie pour $n = 0$.
   Prouvons alors que si c'est vrai au rang n, c'est vrai au rang $n+1$. On suppose donc que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$, or on sait d'après la question précédente que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, i.e. $I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2}$. On obtient donc :

$$(n+1)I_{n+1}\frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit, donc si $n \in \mathbb{N}$, que $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Par croissance et positivité de l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit $0 < I_{n+1} \leq I_n$. L'inégalité de droite est donc prouvée, on peut en effet diviser l'inégalité par I_n puisque $I_n > 0$ par positivité de l'intégrale.
On a alors aussi que $I_{n+2} \leq I_{n+1}$ pour les mêmes raisons. Grâce à la question 2), on en déduit : $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1}$, et il ne reste plus qu'à diviser les deux membres de cette dernière inégalité pour obtenir que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)\pi}{(n+2)2} \leq (n+1)I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

et en déduire la limite de $\sqrt{n}I_n$ quand $n \to +\infty$.
Pour obtenir l'inégalité, on multiplie simplement les trois membres de l'inégalité de la question précedente par $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient au même d'après la question d'avant que de multiplier par $(n+1)I_{n+1}I_n$, et c'est donc par cela qu'on multiplie le membre du milieu.
Elle est vraie pour tout entier, donc si $n \in \mathbb{N}^*$, elle est aussi vraie au rang $n-1$ et porte sur des nombres positifs d'où :

$$\frac{n\pi}{(n+1)2} \leq nI_n^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\frac{n\pi}{(n+1)2}} \leq \sqrt{n}I_n \leq \sqrt{\frac{\pi(n+1)}{2n}}.$$

On en déduit aisément, par encadrement, que $\sqrt{n}I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$. On souhaite donc prouver que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $0 \leq x - \ln(1+x)$. Étudions donc sur $]-1, +\infty[$ la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ f(x) = x - \ln(1+x).$$

Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition, avec :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

Ainsi, la dérivée est négative sur $]-1, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$, on en déduit que f atteint son minimum pour $x = 0$, et on constate que ce minimum est nul. Donc l'inégalité que l'on souhaitait vérifier est bien prouvée.
Prouver alors que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall u \in [-n, +\infty[, \ \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

Si $u \in]-n, +\infty[$, $\frac{u}{n} \in]-1, +\infty[$, et d'après l'inégalité précédente appliquée à $x = \frac{u}{n}$, on a :

$$\forall u \in]-n, +\infty[, \ \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq \frac{u}{n},$$

$$\forall u \in]-n, +\infty[, \ n\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq u.$$

La fonction exponentielle étant croissante, il ne reste plus qu'à écrire que l'exponentielle du premier est inférieure ou égale à celle du deuxième nombre de notre inégalité pour conclure si $u > -n$. Si $u = -n$, l'inégalité est encore vraie, elle signifie qu'une exponentielle est positive.

7. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}.$$

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a $-t^2 \in [-n, 0]$ donc on peut appliquer l'inégalité précédente à $u = -t^2$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

On peut aussi appliquer l'inégalité précédente à $u = t^2$:

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}.$$

On en déduit par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

8. On note dorénavant :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \text{ dt},\ K_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \text{ dt},\ L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \text{ dt}.$$

Grâce aux changements de variables $t = \sqrt{n} \sin u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$ respectivement, exprimer J_n et majorer L_n à l'aide des termes de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Pour que le premier changement de variable convienne, on peut intégrer pour u variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ de sorte que $t = \sqrt{n} \sin u$ varie de 0 à $\sqrt{n}$. Puisque $t = \sqrt{n} \sin u$, on a $\text{dt} = \sqrt{n} \cos u \text{ du}$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n \sin^2 u}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos u \text{ du},$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u \sqrt{n} \cos u \text{ du},$$

$$J_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u \text{ du}.$$

On a donc $J_n = \sqrt{n} I_{2n+1}$, et le deuxième changement de variable proposé, $t = \sqrt{n} \tan u$, convient si l'on intègre entre $u = 0$ et $u = \text{Arctan }(1) = \frac{\pi}{4}$ avec $\text{dt} = \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u}$ du donc :

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1 + \frac{n \tan^2 u}{n}\right)^n} \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u} \text{ du},$$

$$L_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}\right)^n} \frac{1}{\cos^2 u} \text{ du},$$

$$L_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 u\right)^n \frac{1}{\cos^2 u} \text{ du},$$

$$L_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \text{ du}.$$

On en déduit $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.

9. Déterminer la limite de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$. La croissance de l'intégrale, combinée avec l'inégalité prouvée à la question 7), nous assure que $J_n \leq K_n \leq L_n$.
Enfin, on a :

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \text{ et } L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} \sqrt{2n-2} I_{2n-2},$$

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \text{ et } L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}} \sqrt{2n-2} I_{2n-2}.$$

On en déduit aisément que la limite commune de J_n et L_n quand n tend vers $+\infty$ est $\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est donc aussi la limite de K_n par encadrement.

Equations différentielles

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t)\sin t = 2\sin t$$

On remarque tout d'abord qu'une solution particulière de l'équation est donnée par la fonction constante $y_p = 2$.
Étudions alors l'quation homogène associée :

$$(E_h)\ y'(t) + y(t)\sin t = 0$$

Une primitive de $a(t) = \sin t$ est $A(t) = -\cos t$ donc l'ensemble des solutions réelles de E_h est $\{y : t \mapsto Ce^{\cos t} \mid C \in \mathbb{R}$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto Ce^{\cos t} + 2 \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E)\ \ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + \cos t$$

(a) L'équation homogène associée est $(E_h)\ \ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$, d'équation caractéristique $(C)\ r^2 - 3r + 2 = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $r = 1$ et $r = 2$, donc l'ensemble des solutions de (E_h) est $\left\{ y : t \mapsto Ae^t + Be^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = e^t \tag{1}$$
$$y_2''(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = \cos t \tag{2}$$

Pour y_1, comme $e^t = e^{1t}$ et que 1 est racine simple de (C), on cherche y_1 sous la forme $y_1(t) = \alpha t e^t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule alors $y_1'(t) = \alpha e^t + \alpha t e^t$, $y_1''(t) = 2\alpha e^t + \alpha t e^t$ donc $y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = -\alpha e^t$. Il suffit de choisir $\alpha = -1$, et $y_1(t) = -te^t$ convient.
Pour y_2, on cherche une solution complexe $y_{2\mathbb{C}}$ de l'équation $y_{2\mathbb{C}}''(t) - 3y_{2\mathbb{C}}'(t) + 2y_{2\mathbb{C}}(t) = e^{it}$. Puisque i n'est pas racine de (C), on cherche sous la forme $y_{2\mathbb{C}} = \lambda e^{it}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Un calcul simple donne alors $y_{2\mathbb{C}}''(t) - 3y_{2\mathbb{C}}'(t) + 2y_{2\mathbb{C}}(t) = (1-3i)\lambda e^{it}$. On choisit $\lambda = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10}$. Alors la fonction $y_2(t) = \mathrm{Re}\left(y_{2\mathbb{C}}(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+3i}{10} e^{it}\right) = \frac{\cos t - 3\sin t}{10}$ convient.

(c) D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est :

$$y_p(t) = \frac{\cos t - 3\sin t}{10} - te^t$$

On déduit alors de l'étude précédente l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto \frac{\cos t - 3\sin t}{10} - te^t + Ae^t + Be^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$, on calcule $y(0) = \frac{1}{10} + A + B$ et $y'(0) = -\frac{3}{10} - 1 + A + 2B$. Les constantes A et B sont alors solutions du système d'équations $\begin{cases} A + B &= -\frac{1}{10} \\ A + 2B &= \frac{13}{10} \end{cases}$, on trouve enfin $B = \frac{7}{5}$ et $A = -\frac{3}{2}$.