Devoir à la maison

Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \text{ dt}.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Prouver que l'on a pour tout n :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t$.
3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :
$$(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}.$$
4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$
5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\pi(n+1)}{2(n+2)} \leq (n+1) I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$
et en déduire la limite de $\sqrt{n} I_n$ quand $n \to +\infty$.
6. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
Prouver alors que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall u \in [-n, +\infty[, \ \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$
7. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$
8. On note dorénavant pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \text{ dt}, \ K_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \text{ dt}, \ L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \text{ dt}.$$
Grâce aux changements de variables $t = \sqrt{n} \sin u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$ respectivement, exprimer J_n à l'aide des termes de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et prouver que $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.
9. Déterminer la limite de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Equations différentielles

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t)\sin t = 2\sin t$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E) \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + \cos t$$

   (a) Préciser l'équation homogène associée, et l'ensemble de ses solutions réelles.

   (b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = e^t \tag{1}$$
$$y_2''(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = \cos t \tag{2}$$

   En déduire une solution particulière y_p de (E)
   Indication : on pourra chercher sous la forme $y_1 : t \mapsto Cte^t$ et $y_2 : t \mapsto A\cos t + B\sin t$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$.

   (c) Décrire l'ensemble des solutions de (E), et préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.