Devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $$\frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2} > 0$$
2. $$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$
3. $$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$

Exercice 2. *Valeur absolue*

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $|x - 4| = |x - 8|$
   (b) $|x + 2| < 3$.
   (c) $|x + 1| = 4 - |x - 3|$.
2. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \left|x^2 - |x + 2|\right|.$$
   Exprimer $g(x)$ sans les valeurs absolues en distinguant plusieurs intervalles pour x.

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - (m + 1)x + m.$$

1. Étude de f_2 :
   (a) Mettre $f_2(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_2}$.
   (b) Représenter $\mathcal{C}_{f_2}$ dans un repère orthonormé.
2. Résolution de l'équation paramétrique :
   $$(E) \ \ x^2 - (m + 1)x + m = 0$$
   (a) Pour $m \in \mathbb{R}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.
   (b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation (E) ci-dessus.

Exercice 4. *Étude de fonction*

On étudie la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right).$$

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$:

$$\frac{x-1}{3x-4} > 0.$$

   On notera D_g l'ensemble de ses solutions, qui est le domaine de définition de g.
2. Préciser les limites de g : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x \to \frac{4}{3}^+} g(x)$.
3. Justifier que g est dérivable sur D_g, et que l'on a :

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

4. Réaliser le tableau de variations de g.

Exercice 5. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-x^2 + 2x - 1}{x},$$

   on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.
   (a) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale.
   (b) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente a un coefficient directeur égal à -2 ?
   (c) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.
2. On note f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

   On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.
   (a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.
   (c) Conclure.