Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2} > 0$$

   Le trinôme $S(x) = x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2 donc on a :
   $$S(x) = (x-1)(x-2).$$
   Le trinôme $U(x) = -x^2 + x + 2$ a pour racines -1 et 2 donc on peut écrire :
   $$U(x) = -(x+1)(x-2).$$
   L'inéquation n'a de sens que si $x \notin \{-1; 2\}$. Si c'est bien le cas, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur par $(x-2)$ et obtenir :
   $$-\frac{x-1}{x+1} > 0$$
   On en déduit (au moyen d'un tableau de signe par exemple) que l'ensemble des solutions est : $]-1, 1[$

2. $$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

   On pose $V(X) = X^2 - 8X - 9$. Ce trinôme a pour racines -1 et 9.
   Ainsi, les solutions de l'équation sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = -1$ ou $x^2 = 9$. On en déduit qu'il y a exactement deux solutions à l'équation : -3 et 3.

3. $$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$

   Cette dernière équation n'a pas pour solution 0, et pour $x \neq 0$, on peut tout diviser par x^2 afin d'obtenir :
   $$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$
   En posant $u = x + \frac{1}{x}$, on a $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si u vérifie :
   $$2(u^2-2) - 9u + 14 = 0$$
   $$2u^2 - 9u + 10 = 0$$
   Les deux solutions de cette dernière équation sont $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{5}{2}$.
   Il nous reste, dans chacun des deux cas, à résoudre l'équation $x + \frac{1}{x} = u$, qui équivaut à :
   $$x - u + \frac{1}{x} = 0$$
   $$\frac{x^2 - ux + 1}{x} = 0$$
   $$x^2 - ux + 1 = 0$$
   Pour $u = 2$, le discriminant Δ est nul et l'unique solution est $x = 1$.
   Pour $u = \frac{5}{2}$, on a deux solutions $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$.
   L'équation admet un ensemble de 3 solutions : $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

Exercice 2. *Valeur absolue*

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $|x-4| = |x-8|$
   On cherche un réel x qui est à égale distance de 4 et de 8 : il y a donc une unique solution qui est 6, au milieu entre les deux nombres.
   (b) $|x+2| < 3$.
   $|x-(-2)| < 3$.
   L'ensemble des solutions est donc composé des réels dont la distance à -2 est inférieure strictement à 3 :
   $$]-2-3\ ;\ -2+3[=]-5\ ;\ 1[$$
   (c) $|x+1| = 4 - |x-3|$.
   On commence par un tableau de signe des expressions dans les valeurs absolues :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
$x-3$			$-$		0	$+$	

   On distingue donc trois cas :
   i. Si $x \in]-\infty, -1]$, on résout :
   $$-x-1 = 4+x-3,$$
   $$x = -1.$$
   Il y a donc une solution dans cet intervalle : -1.
   ii. Si $x \in]-1, 3]$, on résout :
   $$x+1 = 4+x-3,$$
   $$1 = 1.$$
   Tous les nombres de l'intervalle $]-1, 3]$ sont donc bien des solutions.
   iii. Si $x \in]3, +\infty[$, on résout :
   $$x+1 = 4-x+3,$$
   $$2x = 6,$$
   $$x = 3.$$
   Il n'y a donc pas de solution dans cet intervalle.
   Conclusion : l'équation admet pour ensemble de solutions $[-1, 3]$.
2. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \left|x^2 - |x+2|\right|.$$
   Exprimer $g(x)$ sans les valeurs absolues en distinguant plusieurs intervalles pour x.
   On commence par distinguer deux cas selon le signe de $x+2$.
   (a) Si $x \leq -2$, $x+2 \leq 0$ et l'on a $|x+2| = -x-2$. La fonction a alors pour expression :
   $$g(x) = \left|x^2 + x + 2\right|.$$
   Le calcul du discriminant $\Delta = -7$ de ce trinôme dans la valeur absolue nous indique qu'il est toujous de signe positif donc :
   $$g(x) = x^2 + x + 2.$$

(b) Si $-2 < x$, $0 < x+2$ et l'on a $|x+2| = x+2$.
La fonction a alors pour expression :

$$g(x) = \left|x^2 - x - 2\right|.$$

Le trinôme dans la valeur absolue a deux racines : -1 et 2. On en déduit son tableau de signe :

x	-2		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On distingue donc encore trois sous-cas :

i. Si $x \in]-2,-1]$, on a donc $g(x) = x^2 - x - 2$.
ii. Si $x \in]-1,2]$, on a donc $g(x) = -x^2 + x + 2$.
iii. Si $x \in]-2,+\infty[$, on a donc $g(x) = x^2 - x - 2$.

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - (m+1)x + m.$$

1. Étude de f_2 :
   (a) Mettre $f_2(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_2}$.

$$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

Or si l'on calcule :

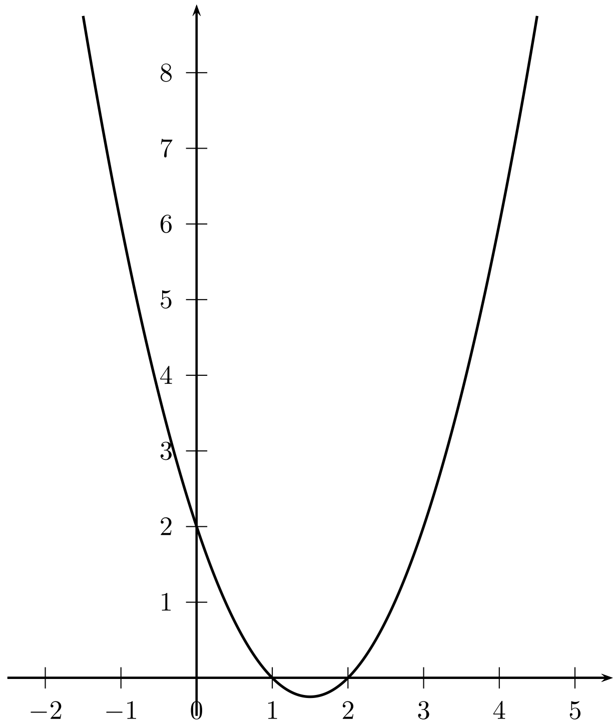
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}.$$

On en déduit :

$$f_2(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Le sommet de la parabole est donc le point $(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{4})$.

   (b) Voici la courbe $\mathcal{C}_{f_2}$ tracée dans un repère orthonormé :



2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E)\ \ x^2-(m+1)x+m=0$$

(a) Pour $m\in\mathbb{R}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.

$$\Delta(m)=(m+1)^2-4m$$
$$\Delta(m)=m^2+2m+1-4m$$
$$\Delta(m)=m^2-2m+1$$
$$\Delta(m)=(m-1)^2$$

Ce discriminant est donc positif pour toute valeur de m, nul si et seulement si $m=1$.

m	$-\infty$		1		$+\infty$
$\Delta(m)$		$+$	0	$+$	

(b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation (E) ci-dessus.
L'équation admet donc une unique solution si $m=1$, et admet deux solutions sinon.

Exercice 4. *Étude de fonction*

On étudie la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right).$$

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$:

$$\frac{x-1}{3x-4}>0.$$

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{3x-4}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions est donc :

$$D_g=]-\infty,1[\cup]\frac{4}{3},+\infty[.$$

2. Préciser les limites de g : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}g(x)$.

On a $\frac{x-1}{3x-4}=\frac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

On remarque que $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-1}{3x-4}=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^-}\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)=-\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=-\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}\frac{x-1}{3x-4}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}g(x)=+\infty$.

3. Justifier que g est dérivable sur D_g, et que l'on a :

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

g est dérivable car la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{3x-4}$ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On calcule alors pour $x \in D_g$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3x-4-3(x-1)}{(3x-4)^2}}{\frac{x-1}{3x-4}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{(3x-4)^2}}{\frac{x-1}{3x-4}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x-4) - 2}{2(x-1)(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

4. Pour $x \in D_g$, on a $(3x-4)(x-1) > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $T(x) = 3x^2 - 7x + 2$. On calcule le discriminant de ce trinôme, $\Delta = 25$ puis ses deux racines $\frac{1}{3}$ et 2. Ainsi, ce trinôme est de signe négatif pour $x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$, positif ailleurs.
On en déduit enfin le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{6} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-x^2 + 2x - 1}{x},$$

on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

(a) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f où la tangente est horizontale.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(-2x+2)x - (-x^2 + 2x - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale en les points où la dérivée s'annule, c'est à dire pour $x = -1$ ou $x = 1$.

(b) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2 ?
Cette question nous amène à résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{-x^2 + 1}{x^2} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq -2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 0$$

L'inéquation n'a pas de solution x dans $\mathbb{R}^*$, donc il n'existe aucun point où la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2.

(c) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.
La tangente est parallèle à cette droite si et seulement si sa pente vaut $-\frac{2}{3}$, on est donc amené à résoudre :

$$\frac{-x^2+1}{x^2} = -\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow -x^2+1 = -\frac{2}{3}x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3$$

Il y a donc deux telles abscisses : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

2. On note f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.

(a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$
$$y = 2ax + a^2 + 1 - 2a^2$$
$$y = 2ax - a^2 + 1$$

(b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.

$$y = g'(b)x + g(b) - bg'(b)$$
$$y = (-2b+4)x - b^2 + 4b - 3 + 2b^2 - 4b$$
$$y = (-2b+4)x - 3 + b^2$$

(c) Conclure.
Les deux droites précédentes sont confondues si et seulement si :

$$\begin{cases} 2a & = & -2b+4 \\ -a^2+1 & = & -3+b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = & -b+2 \\ -(-b+2)^2+1 & = & -3+b^2 \end{cases}$$

La deuxième équation donne après réduction $-b^2+4b = 0$ i.e. $b(-b+4) = 0$.
On a donc deux tangentes à la courbe $\mathcal{C}_g$, en les points d'abscisses $b = 0$ et $b = 4$, qui sont aussi des tangentes à $\mathcal{C}_f$. Il s'agit des droites d'équations :

$$y = 4x - 3 \text{ et } y = -4x + 13$$