
Devoir surveillé

Exercice 1. *Échauffement*

On note $\omega = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2 , ainsi que son module et un argument.
2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω .
3. Calculer la forme algébrique de ω^8 .

Exercice 2. *Sommes géométriques*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}, \quad R_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta), \quad I_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

Calculer S_n puis en déduire une expression simple de R_n et I_n .

Exercice 3. *Cosinus et Sinus de $\frac{\pi}{12}$*

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Calculer $z_1 \overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4. *Linéarisation*

Linéariser les expressions (i.e. transformer les produits de cosinus ou de sinus en sommes) :

$$A(x) = 3 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x$$

$$B(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$$

Exercice 5. Equations dans \mathbb{C}

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$|z + i| = |z - i|$$

2. Déterminer les racines carrées de $-3+4i$, puis résoudre l'équation :

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0.$$

3. Rappeler la définition des racines n -ièmes de l'unité pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la description de leur ensemble vue en cours :

$$\mathbb{U}_n = \{\dots | k \in \llbracket \dots \rrbracket\}$$

4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et les représenter dans le plan.

Donner la forme polaire et l'écriture algébrique de chacune d'entre elles.

5. Dans cette quatrième partie de l'exercice, on étudie les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

- (a) Décrire sous forme polaire l'ensemble des solutions de cette équation, en justifiant avec précision.

- (b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue Z :

$$(E') \quad Z^2 + Z - 1 = 0.$$

- (c) Montrer que $z \in \mathbb{C}^*$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $Z = z + \frac{1}{z}$ est solution de (E') .

- (d) Décrire sous forme algébrique l'ensemble des solutions de (E) et préciser la forme polaire de chacune de ces solutions.