Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Formules pour calculer π*

1. A l'aide des formules qui expriment $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$, prouver que l'on a si a, b, $a+b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

On considère deux réels a et b comme ceci, et l'on calcule alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}.$$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}}.$$

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}.$$

Ceci est bien la formule que l'on souhaitait démontrer.

2. Prouver que l'on a :

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{3}.$$

Notons $\alpha = \mathrm{Arctan}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{3}$.
Calculons alors grâce à la formule précédente avec $a = \mathrm{Arctan}\frac{1}{2}$ et $b = \mathrm{Arctan}\frac{1}{3}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}.$$

On en déduit que $\tan\alpha = 1$, or on sait que $\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}, \mathrm{Arctan}\frac{1}{3} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ puisque $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in]0, 1[$.
Ainsi, $\mathrm{Arctan}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{3} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Sur $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$, tan est strictement croissante donc injective. On peut donc déduire de $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4}$ que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3. Prouver la formule de John Machin (1706) :

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{239}.$$

De la formule ci-dessus, on déduit si $b = a$ que pour tout réel a, $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ et donc :

$$\tan\left(2\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{2\frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

Et l'on en déduit alors :

$$\tan\left(2\left(2\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

Enfin on calcule :

$$\tan\left(4\text{Arctan }\frac{1}{5}-\text{Arctan }\frac{1}{239}\right)=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}}=1$$

Il nous faut prouver que $4\text{Arctan }\frac{1}{5}-\text{Arctan }\frac{1}{239}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ pour s'assurer enfin que $4\text{Arctan }\frac{1}{5}-\text{Arctan }\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$ comme à la question précédente.

Une façon de procéder est de prouver par une brève étude de fonction que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \text{Arctan}x\leq x.$$

On en déduit alors que $4\text{Arctan }\frac{1}{5}\leq\frac{4}{5}$ donc $4\text{Arctan }\frac{1}{5}-\text{Arctan }\frac{1}{239}\in\left[0,\frac{4}{5}\right[$ donc ce nombre se situe bien dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2. *Racines septièmes de l'unité*

On note $u=e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et :

$$S=u+u^2+u^4\ ,\ T=u^3+u^5+u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\overline{u}$ et $\frac{1}{u}$.
   $u^7=1$, et l'on sait que u est de module 1 donc $u\overline{u}=1$ d'où $\overline{u}=\frac{1}{u}$.

   (b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
   On déduit de la question précédente :

$$\overline{S}=u^7\left(\overline{u+u^2+u^4}\right)$$

$$\overline{S}=u^7\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right)$$

$$\overline{S}=u^6+u^5+u^3$$

$$\overline{S}=T$$

   (c) Justifier sans évaluation numérique que la partie imaginaire de S est positive :

$$\text{Im }(S)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

   Or pour tout réel x, on a $\sin(\pi+x)=-\sin x$ d'où :

$$\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

$$\text{Im }(S)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

   Enfin, on déduit de la stricte croissance de sin sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)>0$ et du fait que sin est à valeurs strictement positives sur $]0,\pi[$ que $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)>0$. Ainsi, on a bien $\text{Im }(S)>0$.

2. (a) Simplifier la somme $S+T$. Comme u est une racine 7-ième de l'unité autre que 1, on sait que :

$$1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6=0$$

$$u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6=-1$$

$$S+T=-1.$$

   (b) Développer et calculer le produit $S\times T$.

$$ST=(u+u^2+u^3)T$$

$$ST=uT+u^2T+u^3T$$

$$ST=u^4+u^6+u^7+u^5+u^7+u^8+u^7+u^9+u^{10}$$

$$ST=u^4+u^6+1+u^5+1+u+1+u^2+u^3$$

$$ST=1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+2$$

$$ST=2$$

(c) En déduire la valeur de S et celle de T.

Connaissant la somme et le produit des deux nombres S et T, on sait qu'ils sont les deux racines du polynôme :

$$P(x) = x^2 + x + 2.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -7$ d'où l'on déduit que les deux racines sont $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. Enfin, puisque Im $(S) > 0$, on a :

$$S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

3. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = -i\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = (-u^2)\left(1 + (-u^2) + (-u^2)^2 + \cdots + (-u^2)5\right)$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-(-u^2)^6}{1-(-u^2)}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-u^{12}}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-u^5}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = \frac{-u^2+u^7}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = \frac{u(\bar{u}-u)}{u(\bar{u}+u)}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = \frac{\bar{u}-u}{\bar{u}+u}$$

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = \frac{-2i\text{Im }(u)}{2\text{Re }(u)}$$

Et l'on en déduit le résultat attendu.

(b) Justifier :

$$2(u^2 - u^5) = 4i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

On a :

$$u^2 - u^5 = u^2 - \frac{u^5}{u^7} = u^2 - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = u^2 - \bar{u}^2 = 2i\text{Im }(u^2)$$

Ainsi :

$$2(u^2 - u^5) = 2 \times 2i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 4i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

(c) En déduire :

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\sqrt{7}.$$

On a en effet d'après les deux questions précédentes :

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\text{Im }\left(2u^2-2u^5+\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\text{Im }\left(2u^2-2u^5-u^2+u^4-u^6+u^8-u^{10}+u^{12}\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\text{Im }\left(2u^2-2u^5-u^2+u^4-u^6+u-u^3+u^5\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\text{Im }\left(u^2-u^5+u^4-u^6+u-u^3\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\text{Im }\left(S-T\right).$$

Or $S-T=i\sqrt{7}$ d'où la formule demandée.

Exercice 3. *Equation fonctionnelle*

Soit $a\in\mathbb{R}$. On souhaite déterminer s'il existe $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ telle que :

$$(R)\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-af(x)=e^x.$$

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $\phi:x\mapsto\dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Justifier que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\phi(x)\neq 1$.
   On résout, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\begin{aligned}\phi(x)&=1\\ \Leftrightarrow\ \frac{x+1}{x-1}&=1\\ \Leftrightarrow\ \frac{x+1-(x-1)}{x-1}&=0\\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{x-1}&=0\end{aligned}$$

   Cette dernière équation n'a pas de soulution donc on a bien : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\phi(x)\neq 1$.
2. Calculer $\phi\circ\phi$.
   Si $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, calculons :

$$\phi(\phi(x))=\frac{\phi(x)+1}{\phi(x)-1}$$

$$\phi(\phi(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$$

$$\phi(\phi(x))=\frac{\frac{x+1+x-1)}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}}$$

$$\phi(\phi(x))=\frac{2x}{2}$$

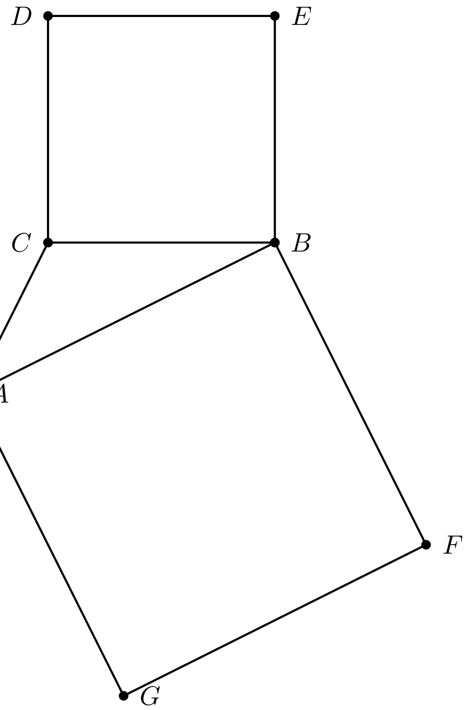
$$\phi\circ\phi(x)=x.$$

   On en déduit que $\phi\circ\phi=\text{Id}_{\ \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

3. Montrer que $\phi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est une bijection.
   Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on doit prouver que y admet un unique antécédent par ϕ.
   Or $\phi(\phi(y)) = y$ donc on sait que $\phi(y)$ est un antécédent de y par ϕ. Il ne reste plus qu'à prouver que c'est le seul : soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $\phi(x) = y$. On en déduit que $\phi(\phi(x)) = \phi(y)$ i.e. $x = \phi(y)$. Ainsi, $\phi(y)$ est bien l'unique antécédent de y par ϕ.
4. On suppose dans cette question et les suivantes que $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R) explicitée au début de l'énoncé. Montrer que l'on a alors : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, (1-a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}$.
   Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a en effet :
   $$(1)\ f(\phi(x)) - af(x) = e^x$$
   La relation (R) est encore vraie si l'on remplace x par $\phi(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
   $$f(\phi(\phi(x))) - af(\phi(x)) = e^{\phi(x)}$$
   $$(2)\ f(x) - af(\phi(x)) = e^{\phi(x)}$$
   On obtient en ajoutant a fois (1) et (2) :
   $$a\left(f(\phi(x)) - af(x)\right) + f(x) - af(\phi(x)) = ae^x + e^{\phi(x)}$$
   $$(1-a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}.$$
5. Montrer que pour $a = 1$ ou pour $a = -1$, il n'existe pas de fonction f vérifiant (R). Pour $a = 1$, on aurait $0 = e^x + e^{\phi(x)}$ ce qui est impossible car une somme de deux exponentielles est strictement positive.
   Pour $a = -1$, on aurait pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: $0 = -e^x + e^{\phi(x)}$ i.e. $e^{\phi(x)} = e^x$. On en déduit par injectivité de l'exponentielle que $\phi(x) = x$. Mais ceci est faux par exemple pour $x = 0$ donc la relation (R) ne peut être vérifiée.
6. Si $a \notin \{-1; 1\}$, déterminer toutes les fonctions qui vérifient (R).
   Si $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R), on a d'après la question 4 :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right).$$
   Il faut vérifier la réciproque.
   Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors on a :
   $$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{1}{1-a^2}\left(ae^{\phi(x)} + e^{\phi(\phi(x))}\right) - a\Big(\frac{1}{1-a^2}\left(ae^x + e^{\phi(x)}\right)\Big)$$
   $$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{ae^{\phi(x)} + e^x - a^2e^x - ae^{\phi(x)}}{1-a^2}$$
   $$f(\phi(x)) - af(x) = \frac{(1-a^2)e^x}{1-a^2}$$
   $$f(\phi(x)) - af(x) = e^x.$$
   La fonction f est donc l'unique fonction qui vérifie (R).

Exercice 4. *Géométrie*

On considère un triangle direct quelconque ABC, et l'on construit comme ci-dessous deux carrés qui s'appuient sur ses cotés.



Soient U et K les milieux de $[EF]$ et $[AC]$, V et L les centres respectifs des deux carrés directs $CBED$ et $BAGF$. Prouver que $UVKL$ forme un carré. On notera à l'aide de la lettre minuscule qui correspond l'affixe de chacun des points de la figure dans un repère orthonormé direct.

1. Puisque E est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$:
   $e = b + e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-b) = b - i(c-b)$ i.e. $e = (1+i)b - ic$.
2. De même, puisque F est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$:
   $f = b + e^{i\frac{\pi}{2}}(a-b) = b + i(a-b)$ i.e. $f = (1-i)b + ia$.
3. Ceci suffit à calculer en fonction de a, b et c les affixes u, v, k et l des points U, V, K et L :

$$u = \frac{e+f}{2} = \frac{i}{2}a + b - \frac{i}{2}c$$

$$v = \frac{e+c}{2} = \frac{1+i}{2}b + \frac{1-i}{2}c$$

$$k = \frac{a+c}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$$

$$l = \frac{a+f}{2} = \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}b$$

4. On vérifie aisément que $v - u = k - l$ donc les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont égaux et $UVKL$ forme un parallélogramme.
   Enfin, il suffit de calculer séparément $u - v$ et $i(k - v)$ pour constater que l'on trouve la même chose. Ainsi, $u - v = i(k - v)$ donc les cotés $[UV]$ et $[KV]$ du parallélogramme sont adjacents, de même longueur, et forment un angle droit. On en déduit que $UVKL$ est un carré.