Devoir surveillé

Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Prouver que l'on a pour tout n :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^{n+2} t = \cos^{n+1} t \cos t$.
3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :
$$(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}.$$
4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$
5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\pi(n+1)}{2(n+2)} \leq (n+1) I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$
et en déduire la limite de $\sqrt{n} I_n$ quand $n \to +\infty$.
6. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
Prouver alors que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall u \in [-n, +\infty[, \ \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$
7. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$
8. On note dorénavant pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \ \mathrm{d}t, \ K_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \ \mathrm{d}t, \ L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \ \mathrm{d}t.$$
Grâce aux changements de variables $t = \sqrt{n} \sin u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$ respectivement, exprimer J_n à l'aide des termes de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et prouver que $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.
9. Déterminer la limite de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Equations différentielles

Exercice 1. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 1

1. Déterminer la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :
$$y'(t) + y(t)\sin t = 2\sin t,$$
telle que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

2. (a) Déterminer une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle :
$$y'(t) + y(t) = 3e^{(2+i)t}$$
   (b) Décrire l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y'(t) + y(t) = 3e^{2t}\cos t$$

Exercice 2. *Equation différentielle originale*

On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$(F) \;\; \forall x \in \mathbb{R},\; f'(x) = 2f(-x) + x.$$

1. Soient α et β deux réels tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\;\; \alpha\cos x + \beta\sin x = 0.$$
Prouver que $\alpha = \beta = 0$.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :
$$(E) \;\; y'' + 4y = 2x + 1.$$
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée à (E).
   (b) Déterminer une fonction affine qui est solution de (E).
   (c) Décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).
3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie la propriété (F).
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (b) Prouver que f est une solution de (E).
   (c) En déduire une expression de f.
4. Conclure : décrire l'ensemble Ω des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (F).