Devoir surveillé

Exercice 1. *Formules pour calculer π*

1. A l'aide des formules qui expriment $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$, prouver que l'on a si a, b, $a+b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$:
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$
2. Prouver que l'on a :
$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{3}.$$
3. Prouver la formule de John Machin (1706) :
$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{239}.$$

Exercice 2. *Racines septièmes de l'unité*

On note $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et :
$$S = u + u^2 + u^4 \ , \ T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\overline{u}$ et $\frac{1}{u}$.
   (b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
   (c) Justifier sans évaluation numérique que la partie imaginaire de S est positive.
2. (a) Simplifier la somme $S+T$.
   (b) Développer et calculer le produit $S \times T$.
   (c) En déduire la valeur de S et celle de T.
3. (a) Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = -i \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$
   (b) Justifier :
$$2(u^2 - u^5) = 4i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$
   (c) En déduire :
$$4 \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{7}.$$

Exercice 3. *Equation fonctionnelle*

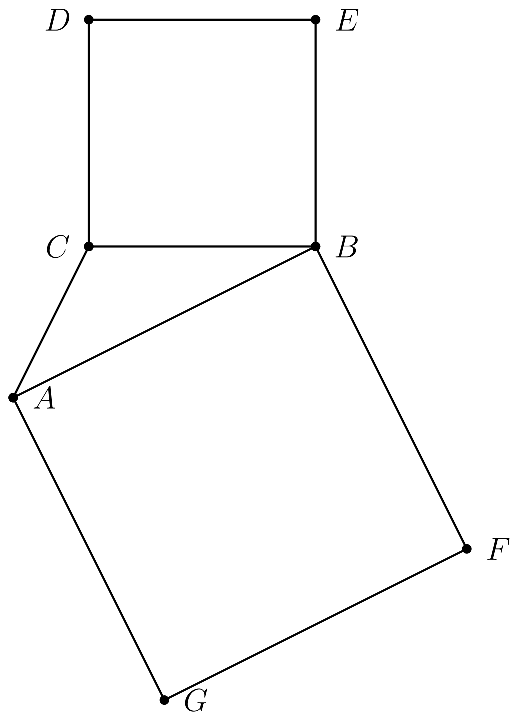
Soit $a \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer s'il existe $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$(R)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - af(x) = e^x.$$

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\phi : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 1$.
2. Calculer $\phi \circ \phi$.
3. Montrer que $\phi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est une bijection.
4. On suppose dans cette question et les suivantes que $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété (R) explicitée au début de l'énoncé. Montrer que l'on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, (1-a^2)f(x) = ae^x + e^{\phi(x)}$.
5. Montrer que pour $a = 1$ ou pour $a = -1$, il n'existe pas de fonction f vérufiant (R).
6. Si $a \notin \{-1; 1\}$, déterminer toutes les fonctions qui vérifient (R).

Exercice 4. *Géométrie*

On considère un triangle direct quelconque ABC, et l'on construit comme ci-dessous deux carrés qui s'appuient sur ses cotés.



Soient U et K les milieux de $[EF]$ et $[AC]$, V et L les centres respectifs des deux carrés directs $CBED$ et $BAGF$. On veut prouver que $UVKL$ forme un carré. On notera à l'aide de la lettre minuscule qui correspond l'affixe de chacun des points de la figure dans un repère orthonormé direct.

1. Calculer l'affixe e du point E en fonction de b et c.
2. Préciser de même l'affixe f en fonction de a et b.
3. Calculer enfin les quatre affixes u, v, k et l en fonction de a, b et c.
4. Indiquer une caractérisation d'un carré, et vérifier à l'aide des calculs précédents que $UVKL$ forme un carré.