Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Echauffement*

On note $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2, ainsi que son module et un argument.

$$\omega^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\omega^2 = 2-\sqrt{2} - (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$\omega^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$
$$\omega^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$
$$\omega^2 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\omega^2 = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

   ω^2 est de module 4 et $-\frac{3\pi}{4}$ en est un argument.

2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω.
   Les deux racines carrées du nombre ω^2 sont $2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$ et $-2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$. On en déduit que $\omega = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$ puisque sa partie réelle est positive.

3. Calculer ω^8.

$$\omega^8 = 2^8 e^{-8i\frac{3\pi}{8}}$$
$$\omega^8 = 256e^{-3i\pi}$$
$$\omega^8 = -256$$

Exercice 2. *Sommes géométriques*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta},\ R_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta),\ I_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Calculer S_n puis en déduire une expression simple de R_n et I_n. Puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$ et on peut appliquer la formule des sommes géométriques :

$$S_n = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$
$$S_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$
$$S_n = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}$$
$$S_n = e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$S_n = \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On remarque que $S_n = R_n + iI_n$, et l'on obtient donc par identification de la partie réelle et imaginaire :

$$R_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \,;\, I_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Exercice 3. *Cosinus et Sinus de* $\frac{\pi}{12}$

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique. $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$.
2. Calculer $z_1\overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

$$z_1\overline{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2},$$
$$z_1\overline{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.$$

$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$
$$z_1\overline{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)},$$
$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

   On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4. *Linéarisation*

Linéariser les expressions (i.e. transformer les produits de cosinus ou de sinus en sommes) :

$$A(x) = 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x$$
$$A(x) = 3\sin^x \cos x(\sin x + \cos x)$$
$$A(x) = \frac{3}{2}\sin(2x)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$
$$A(x) = \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$
$$A(x) = -\frac{e^{i3x}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-i3x}}{4} + \frac{e^{i3x}-e^{ix}+e^{-ix}-e^{-i3x}}{4i}$$
$$A(x) = -\frac{2\cos(3x)-2\cos x}{4} + \frac{2i\sin(3x)-2i\sin x}{4i}$$
$$A(x) = -\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin x$$

$$B(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$$
$$B(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x$$
$$B(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$
$$B(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^2$$
$$B(x) = 1 + \frac{1}{8}(e^{i4x} - 2 + e^{-i4x})$$
$$B(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x)$$

Exercice 5. *Equations dans* $\mathbb{C}$

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$|z+i| = |z-i|$$

On a en puisqu'un module est toujours positif :

$$|z-i| = |z+i| \iff |z-i|^2 = |z+i|^2$$

$$|z-i| = |z+i| \iff (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1$$

$$|z-i| = |z+i| \iff 2i(z-\bar{z}) = 0$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z - \bar{z} = 0$$

$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

L'ensemble de nombre cherché ici est donc $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les racines carrées de $-3+4i$.
On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = -3+4i$, c'est à dire vérifiant :

$$\begin{cases} (1) \quad a^2 - b^2 = -3 \\ (2) \quad 2ab = 4 \end{cases}$$

Avec la condition que $|a+ib|^2 = \sqrt{3^2+4^2}$, i.e. (3) $a^2+b^2=5$, on obtient en ajoutant ou soustrayant (1) et (3) : $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$. Puisque a et b sont de même signe d'après (3), on a donc : $1+2i$ et $-1-2i$ sont les deux racines carrées de $-3+4i$.
Résolvons maintenant :

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = -3+4i$ dont une racine carrée est $\delta = 1+2i$. Ainsi, les deux solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1-i \text{ et } z_2 = \frac{3+(1+2i)}{2} = 2+i.$$

3. Rappeler la définition des racines n-ièmes de l'unité pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la description de leur ensemble vue en cours :

$$\mathbb{U}_n = \{\cdots | k \in [\![\cdots]\!]\}$$

4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et les représenter dans le plan.
Cet ensemble est :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{e^{\frac{ik\pi}{3}} \mid k \in [\![0,5]\!]\right\}$$

$$\mathbb{U}_6 = \left\{e^{i0}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{\frac{i4\pi}{3}}, e^{\frac{i5\pi}{3}}\right\}$$

Et voici leurs formes algébriques dans le même ordre :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

.

5. Dans cette quatrième partie de l'exercice, on étudie les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E)\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

   (a) Décrire sous forme polaire l'ensemble des solutions de cette équation, en justifiant avec précision.
   Pour tout $z \neq 1$, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{z^5-1}{z-1}$ donc les solutions de l'équation sont exactement les racines 5-ièmes de l'unité à l'exception de 1. Il s'agit de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$(E')\ Z^2 + Z - 1 = 0.$$

   On calcule le discriminant $\Delta = 5$, l'équation a donc deux solutions $Z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Si $z \in \mathbb{C}^*$, $Z = z + \frac{1}{z}$ est solution de (E') équivaut à :

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 0$$

Ceci est bien équivalent, si $z \in \mathbb{C}^*$, à z solution de (E).

(d) Décrire sous forme algébrique l'ensemble des solutions de (E) et préciser la forme polaire de chacune de ces solutions.

D'après la question précédente, puisque 0 n'est pas solution de (E), les solutions de (E) sont les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que :

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$$

On calcule les deux discriminants $\Delta_1 = \frac{\sqrt{5}-5}{2}$ et $\Delta_2 = \frac{-\sqrt{5}-5}{2}$ qui sont strictement négatifs. On en déduit les 4 solutions des deux équations :

$$z = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2} \text{ ou } z = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2}$$

$$\text{ou } z = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2} \text{ ou } z = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}$$

On reconnaît alors simplement à l'aide du signe de la partie réelle et imaginaire :

$$e^{\frac{6i\pi}{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2}, \ e^{\frac{4i\pi}{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2},$$

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}, \ e^{\frac{8i\pi}{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}.$$