Corrigé du devoir surveillé

Equations différentielles

Exercice 1. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 1

1. Déterminer la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y' + \sin x\, y = 2\sin x,$$

telle que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
Pour résoudre l'équation homogène associée, on considère une primitive A de la fonction a telle que $a(x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $A(x) = \cos x$ convient donc l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est :

$$\{y : x \mapsto Ce^{\cos x} | C \in \mathbb{R}\}.$$

Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p : x \mapsto 2$. On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\{y : x \mapsto Ce^{\cos x} + 2 | C \in \mathbb{R}\}.$$

La solution qui vérifie $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ est telle que $Ce^0 + 2 = 1$, c'est à dire $C = -1$ et $y(x) = 2 - e^{\cos x}$.

2. (a) Déterminer une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = 3e^{(2+i)x}$$

Cherchons une solution sous la forme $y_p : x \mapsto Ke^{(2+i)x}$ où $K \in \mathbb{C}$ est une constante. Calculons alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p'(x) + y_p(x) = (2+i)Ke^{(2+i)x} + Ke^{(2+i)x},$$
$$y_p'(x) + y_p(x) = (3+i)Ke^{(2+i)x}.$$

Ainsi, y_p est bien une solution si $(3+i)K = 3$, c'est à dire $K = \dfrac{3}{3+i} = \dfrac{9-3i}{10}$ et $y_p : x \mapsto \dfrac{9-3i}{10}e^{(2+i)x}$.

(b) Décrire l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + y = 3e^{2x}\cos x$$

Une solution particulière de cette nouvelle équation est Re (y_p) puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3e^{2x}\cos x =$ Re $(3e^{(2+i)x})$. Calculons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p(x) = \frac{9-3i}{10}e^{2x}(\cos x + i\sin x),$$

$$y_p(x) = \frac{9\cos x + 3\sin x}{10}e^{2x} + i\left(\frac{9\sin x - 3\cos x}{10}e^{2x}\right),$$

$$\text{Re }(y_p)(x) = \frac{9\cos x + 3\sin x}{10}e^{2x}.$$

L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions $\{y : x \mapsto Ce^{-x} | C \in \mathbb{R}\}$, donc l'ensemble des solutions de l'équation complète est :

$$\left\{y : x \mapsto \frac{9\cos x + 3\sin x}{10}e^{2x} + Ce^{-x} | C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 2. *Equation différentielle originale*

On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$(F) \ \ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x.$$

1. Soient α et β deux réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

   Prouver que $\alpha = \beta = 0$.
   Pour $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$ puis pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ \ y'' + 4y = 2x + 1.$$

   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée à (E). L'équation homogène associée, $y'' + 4y = 0$, a pour polynôme caractéristique $P(r) = r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i)$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de cette équation homogène est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) | (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (b) Déterminer une fonction affine qui est solution de (E).
   On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = \dfrac{2x+1}{4}$ définit une solution affine de (E) puisque $y_p'' = 0$.

   (c) Décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{2x+1}{4} | (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie la propriété (F).

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Puisque f vérifie (F), on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, $x \mapsto 2f(-x) + x$ aussi donc f' est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (b) Prouver que f est une solution de (E).
   Puisque f est deux fois dérivable, on déduit de la relation (F) par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2f'(-x) + 1.$$

   Si f vérifie (F), on a aussi, si $x \in \mathbb{R}$, en prenant $-x$ au lieu de x comme réel : $f'(-x) = 2f(x) - x$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2(2f(x) - x) + 1,$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 4f(x) = 2x + 1.$$

   Ceci signifie que f est une solution de (E).

   (c) En déduire une expression de f.
   On a donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \dfrac{2x+1}{4}$.

4. Conclure : décrire l'ensemble Ω des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (F). Il ne reste plus qu'à voir à quelle condition portant sur $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ une fonction f définie comme précédemment vérifie (F). Calculons donc pour une telle fonction :

$$f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2},$$
$$2f(-x) + x = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) + \frac{-2x+1}{2} + x,$$
$$2f(-x) + x = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\frac{1}{2}.$$

   Ainsi, f vérifie (F) si et seulement si l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2} = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2(B - A)\sin(2x) + 2(B - A)\cos(2x) = 0$$

   Grâce à la première question de cet exercice, f vérifie donc (F) si et seulement si f est de la forme précitée avec $A = B$. Ainsi, on décrit :

$$\Omega = \left\{ f : x \mapsto A\cos(2x) + A\sin(2x) + \frac{2x+1}{4} \mid A \in \mathbb{R} \right\}.$$

Primitive de fonction trigonométrique du sujet bis

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n u}{1+\cos u}\ \mathrm{du}.$$

1. (a) Pour $x \in]-\pi,\pi[$, calculer $f_0(x)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{u}{2}$, c'est à dire $u = 2\mathrm{Arctan}\ t$.

   Ce changement de variable revient à $u = 2\mathrm{Arctan}\ t$, on remplace donc du par $\dfrac{2}{1+t^2}$ dt.

   Pour les bornes, $u = 0$ correspond à $t = 0$ et $u = x$ donne $t = \tan\frac{x}{2}$.

   Enfin, on a vu dans le cours sur les complexes que $\cos u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, et l'on obtient :

$$f_0(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{dt}$$

$$f_0(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2}{1+t^2+1-t^2}\ \mathrm{dt}$$

$$f_0(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} 1\ \mathrm{dt}$$

$$f_0(x) = \tan\frac{x}{2}$$

   (b) Calculer ensuite $f_1(x)$ à l'aide de $f_0(x)$, puis $f_2(x)$ et $f_3(x)$.

   On a :

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1+\cos u}\ \mathrm{du}$$

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{\cos u + 1}{1+\cos u}\ \mathrm{du} - \int_0^x \frac{1}{1+\cos u}\ \mathrm{du}$$

$$f_1(x) = x - f_0(x)$$

$$f_1(x) = x - \tan\frac{x}{2}$$

   De même, on obtient :

$$f_2(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 u}{1+\cos u}\ \mathrm{du}$$

$$f_2(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 u + \cos u}{1+\cos u}\ \mathrm{du} - \int_0^x \frac{\cos u}{1+\cos u}\ \mathrm{du}$$

$$f_2(x) = \int_0^x \cos u\ \mathrm{du} - f_1(x)$$

$$f_2(x) = \sin x - x + \tan\frac{x}{2}.$$

   Enfin, on calcule :

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{\cos^3 u}{1+\cos u}\ \mathrm{du}$$

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{\cos^3 u + \cos^2 u}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u - \int_0^x \frac{\cos^2 u}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u$$

$$f_3(x) = \int_0^x \cos^2 u \,\mathrm{d}u - f_2(x)$$

Or $\cos^2 u = \left(\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2u}+2+e^{-i2u}}{4} = \frac{2\cos(2u)+2}{4} = \frac{\cos(2u)+1}{2}$.

On en déduit $\int_0^x \cos^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2u)+u\right]_0^x = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} - \sin x + x - \tan\frac{x}{2}.$$

$$f_3(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) - \sin x - \tan\frac{x}{2}.$$

2. (a) Étudier la fonction f_n sur $]-\pi,\pi[$: parité, dérivabilité, sens de variation.

On sait que f_n est dérivable avec :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f_n'(x) = \frac{\cos^n x}{1+\cos x}.$$

Parité : montrons d'abord que f_n est impaire. Soit $g_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$. Puisque f_n est dérivable, g_n est dérivable avec :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ g_n'(x) = \frac{\cos^n x}{1+\cos x} - \frac{\cos^n(-x)}{1+\cos(-x)}.$$

Comme la fonction cosinus est paire, on a donc $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ g_n'(x) = 0$ donc g_n est constante sur $]-\pi,\pi[$, et $g_n(0) = 0$ donc g_n est la fonction nulle. On en déduit que f_n est impaire.

Variations sur $[0,\pi[$: il faut distinguer deux cas.

— Si n est pair, alors f_n' est positive sur $[0,\pi[$ et f_n est croissante sur $[0,\pi[$. Par imparité, f_n est aussi croissante sur $]-\pi,0]$.

— Si n est impair, alors f_n' est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{2},\pi[$. Par imparité, on en déduit que f_n est décroissante sur $]-\pi,-\frac{\pi}{2}]$, croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2},\pi[$.

(b) Pour $x \geq \frac{2\pi}{3}$, minorer

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{|\cos^n u|}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u.$$

Pour $u \in [\frac{2\pi}{3},\pi[$, on a $\cos u \leq -\frac{1}{2}$ donc $|\cos^n u| \geq \frac{1}{2^n}$. Puisque $1+\cos u > 0$ dans ce cas, on en déduit :

$$\frac{|\cos^n u|}{1+\cos u} \geq \frac{1}{2^n}\frac{1}{1+\cos u}$$

Pour $x \geq \frac{2\pi}{3}$, on a donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{|\cos^n u|}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u \geq \int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{1}{2^n}\frac{1}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u$$

La relation de Chasles nous donne :

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{1}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{1}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u$$

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{1}{1+\cos u} \,\mathrm{d}u = \tan(\frac{x}{2}) - \tan(\frac{\pi}{3})$$

On en déduit :

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x} \frac{|\cos^n u|}{1+\cos u}\,\mathrm{du} \geq \frac{1}{2^n}(\tan(\frac{x}{2}) - \tan(\frac{\pi}{3}))$$

En déduire les limites de f_n en $-\pi$ et π : commençons par π

$$f_n(x) = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^n u}{1+\cos u}\,\mathrm{du} + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x} \frac{\cos^n u}{1+\cos u}\,\mathrm{du}$$

Ainsi, pour $x \geq \frac{2\pi}{3}$, on a :

$$f_n(x) = f_n(\frac{2\pi}{3}) + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x} \frac{\cos^n u}{1+\cos u}\,\mathrm{du}$$

On distingue deux cas :

— si n est pair, $\cos^n u = |\cos^n u|$ donc pour $x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[$:

$$f_n(x) \geq f_n(\frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2^n}(\tan(\frac{x}{2}) - \tan(\frac{\pi}{3}))$$

Par encadrement, on en déduit que $f_n(x) \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} +\infty$.

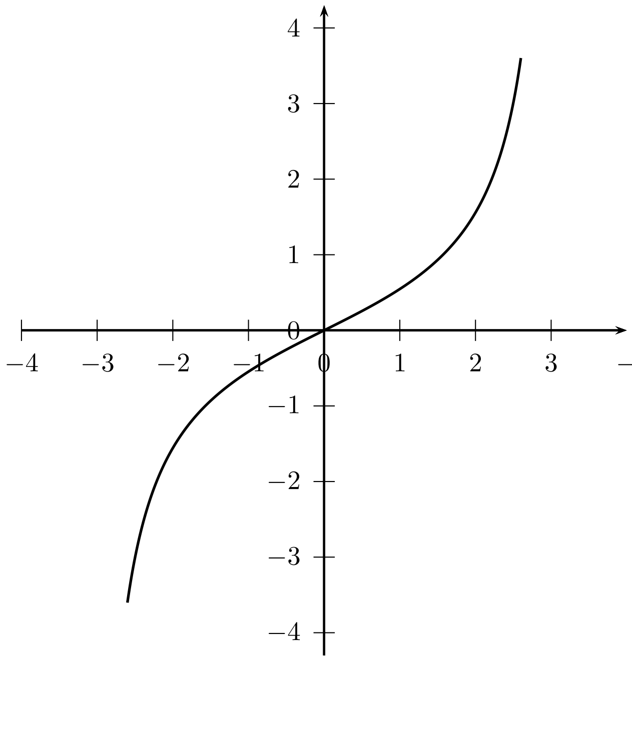
— si n est impair, $\cos^n u = -|\cos^n u|$ donc pour $x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[$:

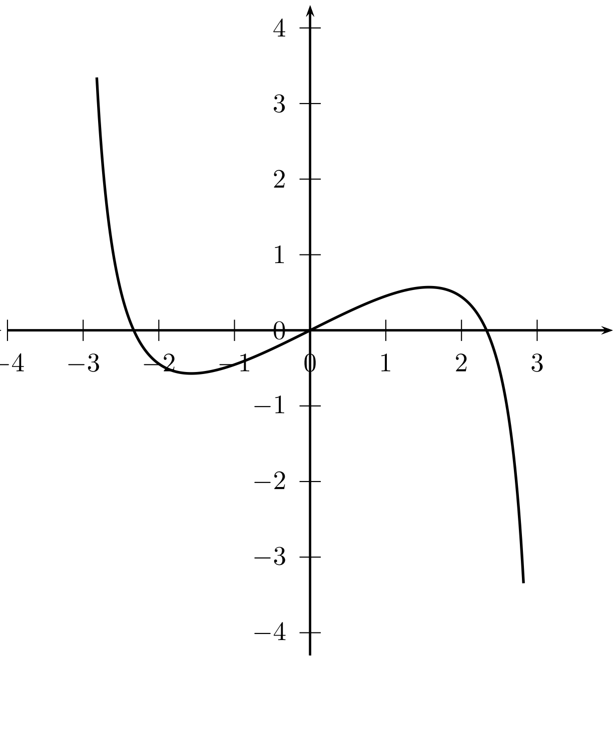
$$f_n(x) \leq f_n(\frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{2^n}(\tan(\frac{x}{2}) - \tan(\frac{\pi}{3}))$$

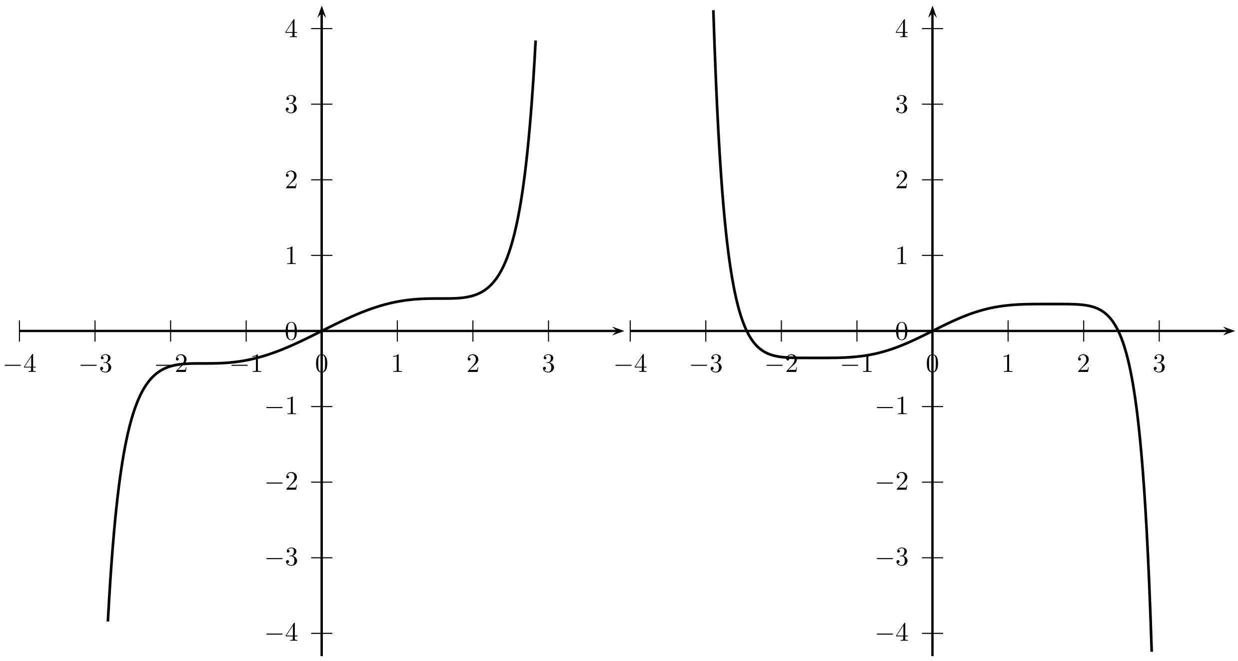
Par encadrement, on en déduit que $f_n(x) \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} -\infty$.

Comme f_n est impaire, sa limite en $-\pi$ est l'opposée de sa limite en π.

Donner l'allure de la courbe de f_n sur $]-\pi, \pi[$ en discutant selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.







3. Pour $n \geq 2$, trouver une relation entre $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$.
   Indication : I.P.P. avec
$$\frac{\cos^n u}{1+\cos u} = \cos u \frac{\cos^{n-1} u}{1+\cos u}.$$
   On suit l'indication : l'intégrale est du type $\int U'V$ où $U(u) = \sin u$ et $V(u) = \frac{\cos^{n-1} u}{1+\cos u}$, donc on a :
$$f_n(x) = \left[\sin u \frac{\cos^{n-1} u}{1+\cos u}\right]_0^x - \int_0^x \sin u \frac{(n-1)(-\sin u)\cos^{n-2} u(1+\cos u) + \sin u \cos^{n-1} u}{(1+\cos u)^2}\,\mathrm{du}.$$
$$f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} - \int_0^x \frac{-(n-1)\sin^2 u \cos^{n-2} u}{1+\cos u} + \frac{\sin^2 u \cos^{n-1} u}{(1+\cos u)^2}\,\mathrm{du}.$$
$$f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} - \int_0^x \frac{-(n-1)(1-\cos^2 u)\cos^{n-2} u}{1+\cos u} + \frac{(1-\cos^2 u)\cos^{n-1} u}{(1+\cos u)^2}\,\mathrm{du}.$$
$$f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} - \int_0^x \frac{-(n-1)\cos^{n-2} u + (n-1)\cos^n u}{1+\cos u} + \frac{(1-\cos u)(1+\cos u)\cos^{n-1} u}{(1+\cos u)^2}\,\mathrm{du}.$$
$$f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} + (n-1)f_{n-2}(x) - (n-1)f_n(x) - \int_0^x \frac{(1-\cos u)\cos^{n-1} u}{1+\cos u}\,\mathrm{du}.$$
$$f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} + (n-1)f_{n-2}(x) - (n-1)f_n(x) - f_{n-1}(x) + f_n(x).$$
$$(n-1)f_n(x) = \sin x \frac{\cos^{n-1} x}{1+\cos x} + (n-1)f_{n-2}(x) - f_{n-1}(x).$$

Application des composées d'homothéties à un problème de géométrie

On considère trois cercles disjoints dans le plan, de rayons tous différents. Lorsque l'on considère deux de ces cercles, il existe deux tangentes extérieures communes de sorte que nos deux cercles se trouvent entre ces deux tangentes. Ces deux tangentes se rencontrent en un point. Le but de cet exercice est de prouver que les trois points ainsi définis, en choisissant pour chacun deux des trois cercles, sont alignés.

1. Etant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres d'affixe c_1 et c_2, de rayons r_1 et r_2, montrer qu'il existe une seule homothétie de rapport positif qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Déterminer en fonction de c_1, c_2, r_1 et r_2 l'affixe du centre de cette homothétie.

   Préciser le lien avec les tangentes extérieures évoquées au début de l'exercice.

   Puisqu'une homothétie multiplie les longueurs par son rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$, l'image du centre de $\mathcal{C}_1$ par une telle homothétie est le centre de $\mathcal{C}_2$. (Il suffit pour le constater de considérer un triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_1$: alors l'image de $\mathcal{C}_1$ sera un cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ image de ABC par l'homothétie. Or le triangle $A'B'C'$ est inscrit dans $\mathcal{C}_2$. Comme l'image de la médiatrice de $[AB]$ est la médiatrice de $[A'B']$, et de même pour celles de $[AC]$ et $[A'C']$, on en déduit que l'image du centre du cercle circonscrit à ABC est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$.)

   Ainsi, si cette homothétie existe, l'affixe de son centre ω_1 vérifie $c_2 - \omega_1 = k(c_1 - \omega_1)$. En outre, on a naturellement $k = \frac{r_2}{r_1}$ donc $c_2 - kc_1 = (1-k)\omega_1$ et $\omega_1 = \dfrac{c_2 - kc_1}{1-k}$. Réciproquement, on vérifie aisément que cette l'homothétie de rapport k et de centre ω_1 ainsi définie transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$.

   Naturellement, les deux droites tangentes à $\mathcal{C}_1$ passant par ω_1 ont pour images deux droites tangentes à $\mathcal{C}_2$. Or ces droites ont pour image des droites qui leur sont parallèles et qui passent aussi par ω_1. Ainsi, ces deux droites sont globalement invariantes par l'homothétie, et il s'agit donc des tangentes extérieures communes aux deux cercles.

2. Soient deux homothéties de centres ω_1 et ω_2 de rapports k_1 et k_2 tels que $k_1k_2 \neq 1$, montrer que la composée de ces deux homothéties est une homothétie dont le centre ω est aligné avec ω_1 et ω_2.

   On calcule la composée :

$$h_{\omega_1,k_1} \circ h_{\omega_2,k_2}(z) = \omega_1 + k_1\left(\omega_2 + k_2(z-\omega_2) - \omega_1\right)$$
$$h_{\omega_1,k_1} \circ h_{\omega_2,k_2}(z) = k_1k_2z + (1-k_1)\omega_1 + k_1(1-k_2)\omega_2$$

   On souhaite identifier cette transformation avec :

$$h_{\omega,k}(z) = kz + (1-k)\omega$$

   où $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

   Il suffit de choisir $k = k_1k_2$ et $\omega = \dfrac{(1-k_1)\omega_1 + k_1(1-k_2)\omega_2}{1-k_1k_2}$.

   Calculons enfin :

$$\omega - \omega_1 = \frac{\omega_1 + k_1\omega_2 - k_1k_2\omega_2 - k_1\omega_1}{1-k_1k_2} - \frac{\omega_1 - k_1k_2\omega_1}{1-k_1k_2}$$
$$\omega - \omega_1 = \frac{k_1\omega_2 - k_1k_2\omega_2 + k_1k_2\omega_1 - k_1\omega_1}{1-k_1k_2}$$
$$\omega - \omega_1 = \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}(\omega_2 - \omega_1)$$

   Comme $\frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2} \in \mathbb{R}$, on en déduit que les points d'affixes ω_1, ω_2 et ω sont alignés.

3. Conclure : l'homothétie qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$, composée avec celle qui transforme $\mathcal{C}_2$ en $\mathcal{C}_3$ est l'homothétie qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_3$. Ainsi, les centres ω_1, ω_2 et ω_3 de ces homothéties sont alignés. Or il s'agit d'après la première question des trois points d'intersection des tangentes extérieures.

Equation différentielle du sujet bis

1. Etudier sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$x(1-x)y' + y = x$$

   Sur I l'un de ces trois intervalles, l'équation se ramène à :

$$(E) y' + \frac{1}{x(1-x)}y = \frac{1}{1-x}$$

   On cherche donc une primitive A à la fonction a définie par $a(x) = \frac{1}{x(1-x)}$. On remarque que $a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln(|1-x|) + \ln(|x|)$. Ainsi, les solutions de l'équation homogène associée, $(E_h) y' + \frac{1}{x(1-x)}y = 0$, sont les fonctions y telles que $\exists C \in \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in I$:

$$y(x) = Ce^{\ln(|1-x|) - \ln(|x|)}$$

$$y(x) = C\frac{|1-x|}{|x|}$$

Ceci signifie, quitte à changer la constante par son opposé, que les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y(x) = C\frac{1-x}{x}$$

Notons $y_1(x) = \frac{1-x}{x}$, on cherche les solutions de (E) par la méthode de la variation de la constante sous la forme $y(x) = C(x)y_1(x)$ et l'on calcule :

$$y'(x) + \frac{1}{x(1-x)}y(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)(y_1'(x) + \frac{1}{x(1-x)}y_1(x))$$

Ceci se simplifie en $y'(x) + \frac{1}{x(1-x)}y(x) = C'(x)y_1(x)$ puisque y_1 est solution de E_h. Sur l'un des trois intervalles considéré, y est donc solution de (E) si l'on a :

$$C'(x)y_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

On cherche donc à résoudre $C'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Cherchons une primtive F de :

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$F(x) = \ln(|1-x|) + \frac{1}{1-x}.$$

La fonction y est alors solution de (E) si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que

$$C(x) = \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + k$$

$$y(x) = \big(\ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + k\big)\frac{1-x}{x}$$
$$y(x) = \frac{(1-x)\ln|1-x|}{x} + \frac{1}{x} + k\frac{1-x}{x}$$
$$y(x) = \frac{(1-x)\ln|1-x|}{x} + \frac{k+1}{x} - k.$$

2. Déterminons les solutions de cette équation sur $]-\infty, 1[$: sur cet intervalle, les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + \frac{k+1}{x} - k$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$, où k peut prendre une valeur différente selon l'intervalle. Mais $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} = -1$. Que l'on étudie une solution sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, 1[$ ne change rien : pour que la fonction ait une limite en $x = 0$, il faut que $k = -1$ donc l'unique solution sur $]-\infty, 1[$ est :

$$y(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1.$$

Cette fonction est continue en 0 à condition de définir $y(0) = 0$, l'étude de sa dérivabilité en 0 est délicate et me semble devoir attendre l'étude des développements limités. C'est très bien si vous vous êtes posé la question de savoir si elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et la réponse est oui.

3. Comme $\lim_{x\to 0} x\ln x = 1$, $\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = 0$ donc :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1 = 1$$

et l'unique fonction y solution sur $]-\infty, 1[$ peut être prolongée continûment en $x = 1$ par $y(1) = 1$. La question de la dérivabilité en 1 (à gauche) est donc de savoir si $\lim_{x\to 1^-} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x-1)}{x}$ existe et est finie. Ce n'est pas le cas (cette limite vaut $-\infty$) donc il n'y a pas de solution sur $]-\infty, 1[$ dérivable en 1, et pas de solution sur $\mathbb{R}$.