Devoir surveillé

Exercice 1. *Quantificateurs*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est la fonction nulle.
2. f s'annule.
3. f est à valeurs positives.
4. f est constante.
5. f est strictement croissante sur I.

Exercice 2. *Rationnels et irrationnels*

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Somme de deux irrationnels.
   (a) Montrer que $\sqrt{10}$ est irrationnel.
   (b) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est irrationnel.
   (c) La proposition suivante est-elle vraie : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2\,,\ x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice 3. *Une inéquation fonctionnelle, Suède* 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x - y)^2.$$

On considère une fonction f qui est solution de notre problème.
On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. On coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x$, x_1, x_2,...,$x_n = y$, de sorte que pour tout entier k entre 0 et n, $x_k = x + k\frac{y-x}{n}$.

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$?
2. Montrer que l'on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x - y)^2}{n}.$$
3. Prouver alors que $|f(y) - f(x)| = 0$.
4. Conclure.

Exercice 4. *Calculs de sommes*

1. Sommes doubles.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (i+j)$$
$$S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$$
$$S_3 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

2. Sommes binomiales.
   (a) Pour a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du binôme de Newton permettant de développer $Z_n = (a+b)^n$.
   Ecrire complètement, sans le signe Σ, la formule ainsi obtenue pour $n = 5$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
      i. Selon la valeur de $k \in [\![0, n]\!]$, calculer :
      $$S_k = \sum_{p=1}^{n} \omega^{-kp}.$$
      ii. Montrer alors que l'on a si $z \in \mathbb{C}$:
      $$\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n = n(z^n + 1).$$
      Indication :on pourra écrire cette somme comme une double somme, puis permuter les sommes.

Exercice 5. *Divergence de la série harmonique*

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Quelle propriété de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie assure que cette suite a une limite. De quel type de limite peut-il s'agir ?
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - u_n$. Exprimer v_n sous forme d'une somme puis prouver que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \geq \frac{1}{2}.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.