# Corrigé du devoir surveillé

**Exercice 1.** *Une fonction périodique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$ un réel tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$ et qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2a)$ en fonction de $f(x)$. Là il faut utiliser le fait que $x + 2a = (x+a) + a$.

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}.$$

$$f(x+2a) = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}.$$

$$f(x+2a) = \frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-1-f(x)}.$$

$$f(x+2a) = -\frac{1}{f(x)}.$$

2. Montrer que $f$ est une fonction périodique. On recommence avec $x+4a = x+2a+2a$ :

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)}.$$

$$f(x+4a) = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}.$$

$$f(x+4a) = f(x)$$

Et $f$ est donc périodique de période $4a$.

**Exercice 2.** *Équations fonctionnelles*

Les deux parties de cet exercice sont liées, on pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$(R) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $a = f(1)$.

(a) Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que $f$ est impaire.
Pour $x = y = 0$, on a $f(0+0) = f(0) + f(0)$, c'est à dire $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on a pour $y = -x$ : $f(x-x) = f(x) + f(-x)$, c'est à dire $0 = f(x) + f(-x)$ donc $f$ est impaire.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la propriété est clairement vraie. Prouvons la par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
Supposons donc qu'elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, on a alors d'après $(R)$ pour $y = nx$ : $f(x + nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x)$. Ceci signifie $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$. La propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

(c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = kf(x)$. On doit le prouver si $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, soit dans un cas où $-k \in \mathbb{N}$ donc $f((-k)x) = (-k)f(x)$, c'est à dire $-f(kx) = -kf(x)$ par imparité de $f$, d'où $f(kx) = kf(x)$.

(d) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = ar$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On a alors, si $x \in \mathbb{R}$, d'après les questions précédentes : $f(qrx) = qf(rx)$ et $f(qrx) = f(q\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$. De ces deux égalités, on déduit $qf(rx) = pf(x)$, c'est à dire $f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x)$.
En particulier, on a donc $f(r) = f(r \times 1) = rf(1) = ar$.

(e) On a admis que si $f$ est une fonction continue vérifiant $(R)$, alors on a un réel $a$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at.$$

Réciproquement, toute fonction de la forme $f(t) = at$ où $a \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $(R)$. Les fonctions vérifiant $(R)$ qui sont continues sont ainsi les fonctions linéaires.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to ]-1, 1[$ une application continue telle que :

$$(S) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 + g(x)g(y)}.$$

(a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x$ réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
Montrer que $\phi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$, et que $\phi$ vérifie $(S)$.
$\phi$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\phi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$\phi'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Ainsi, $\phi$ est strictement croissante, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont $-1$ et $1$, donc $\phi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.
Calculons alors :

$$\frac{\phi(x) + \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}}{1 + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}}.$$

$$\frac{\phi(x) + \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{(e^x - 1)(e^y + 1) + (e^y - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^y + 1) + (e^x - 1)(e^y - 1)}.$$

$$\frac{\phi(x) + \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^x e^y - 2}{e^{x+y} + e^x + e^y + 1 + e^{x+y} - e^x - e^y + 1}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^{x+y}-2}{2e^{x+y}+2}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \phi(x+y).$$

(b) En déduire une expression simple, si $(X,Y)\in]-1,1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.

Pour $x=\phi^{-1}(X)$ et $y=\phi^{-1}(Y)$, on a d'après la question précédente :

$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{\phi(\phi^{-1}(X))+\phi(\phi^{-1}(Y))}{1+\phi(\phi^{-1}(X))\phi(\phi^{-1}(Y))}$$

$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{X+Y}{1+XY}$$

On en déduit que $\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)$ est l'unique antécédent dans $\mathbb{R}$ de $\frac{X+Y}{1+XY}$, donc :

$$\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right) = \phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y).$$

(c) On note $h=\phi^{-1}\circ g$, montrer que $h$ vérifie la propriété $(R)$ de la première partie de l'exercice.

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculons :

$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x+y))$$

$$h(x+y) = \phi^{-1}(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)})$$

On peut appliquer la question précédente avec $X=g(x)$ et $Y=g(y)$ donc :

$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x))+\phi^{-1}(g(y))$$

$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$

(d) Déterminer alors une expression simple de $g$, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $(S)$.

Comme $h$ est continue puisque $g$ et $\phi^{-1}$ le sont, on a donc d'après la première partie un nombre $a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=ax$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}, \phi^{-1}(g(x))=ax$ donc $g(x)=\phi(ax)$.

Réciproquement, si $g$ est de cette forme, on a alors si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ :

$$g(x+y)=\phi(a(x+y))=\phi(ax+ay)=\frac{\phi(ax)+\phi(ay)}{1+\phi(ax)\phi(ay)}=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

Les fonctions continues qui vérifient $(R)$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$g(x)=\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$$

où $a\in\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** *Quand la somme des cubes est égale au carré de la somme.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que :

$$(R)\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2.$$

1. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{i=1}^{n}(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   On peut le faire comme vu en cours par changement d'indice $i=n+1-k$, ou bien en écrivant que $k=\sum_{i=1}^{k} 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 1=\sum_{1\leq i\leq k\leq n} 1.$$

   On peut alors échanger les deux indices de ces sommes triangulaires :

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 1;$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{i=1}^{n}(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i.$$

   (b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k$ :

$$2\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{i=1}^{n}(n+1);$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k=n(n+1);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Montrer que $x_1=0$ ou $x_1=1$.

   D'après la relation $(R)$ pour $n=1$, on a $x_1^3=x_1^2$ donc $x_1^2(x_1-1)=0$, c'est à dire finalement $x_1=0$ ou $x_1=1$.

3. On note $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1}^3=2S_nx_{n+1}+x_{n+1}^2$.

   Calculons :

$$S_{n+1}^2=(S_n+x_{n+1})^2;$$

$$S_{n+1}^2=S_n^2+2S_nx_{n+1}+x_{n+1}^2;$$

$$S_{n+1}^2-S_n^2=2S_nx_{n+1}+x_{n+1}^2.$$

   Or la relation $(R)$ revient à $\forall n\in\mathbb{N}^*$ :

$$S_n^2=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3.$$

Au rang $n+1$, on en déduit :

$$S_{n+1}^2 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + x_{n+1}^3.$$

Donc on a $S_{n+1}^2 - S_n^2 = x_{n+1}^3$ et la relation annoncée suit.

4. On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n > 0$. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n$$

Pour $n = 1$, on a vue à une question précédente que $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$. Comme on suppose ici que $x_1 > 0$, on a donc $x_1 = 1$.
Montrons maintenant que la propriété est héréditaire : supposons qu'elle est vérifiée pour tous les entiers de 1 à $n$. On a alors $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. De la relation établie précédemment, on déduit donc :

$$x_{n+1}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$$

On peut diviser par $x_{n+1} > 0$ donc :

$$x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0.$$

La fonction $x \to x^2 - x$ admet le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

L'équation $x^2 - x = n(n+1)$ admet donc une unique solution dans $]0, +\infty[$, or $x = n+1$ est clairement solution donc on a $x_{n+1} = n+1$.
Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie à tout rang.

5. Réciproquement, démontrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = n$ vérifie $(R)$. On le vérifie par récurrence. Au rang $n = 1$, c'est clairement vérifié. Supposons donc que l'on a :

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3.$$

On en déduit :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3;$$

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3;$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3;$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3;$$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3;$$

$$(1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 4.** *Étude d'une suite homographique à l'aide de suites récurrentes linéaires d'ordre* 2.

On étudie les suites définies par une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des complexes tels que $ad - bd \neq 0$.
On suppose que l'on a choisi la valeur $u_0$ de sorte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie.
Soient $p_0$ et $q_0$ deux nombres complexes tels que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relation de récurrence suivante :

$$p_{n+1} = ap_n + bq_n$$

$$q_{n+1} = cp_n + dq_n$$

1. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. Procédons par récurrence :
   - Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$ par hypothèse.
   - Admettons la propriété au rang $n$, on a alors $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ d'où l'on déduit :

   $$u_{n+1} = \frac{a\frac{p_n}{q_n} + b}{c\frac{p_n}{q_n} + d}$$

   $$u_{n+1} = \frac{ap_n + bq_n}{cp_n + dq_n}$$

   $$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

   et la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - Le principe de récurrence permet de conclure que l'on a bien $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont la même relation de récurrence :

   $$p_{n+2} = (a + d)p_{n+1} + (bc - ad)p_n$$

   $$q_{n+2} = (a + d)q_{n+1} + (bc - ad)q_n$$

   Les deux relations qui définissent les suites $p$ et $q$ nous permettent d'écrire :

   $$p_{n+2} = ap_{n+1} + bq_{n+1}$$

   $$q_{n+2} = cp_{n+1} + dq_{n+1}$$

   On peut ensuite remplacer $q_{n+1}$ dans la première égalité, et $p_{n+1}$ dans la deuxième :

   $$p_{n+2} = ap_{n+1} + b(cp_n + dq_n)$$

   $$q_{n+2} = c(ap_n + bq_n) + dq_{n+1}$$

On remarque enfin que les relations définissant $p$ et $q$ donnent :

$$p_{n+1} - ap_n = bq_n$$

$$q_{n+1} - dq_n = cp_n$$

On remplace alors $bq_n$ et $cp_n$ dans notre calcul :

$$p_{n+2} = ap_{n+1} + bcp_n + d(p_{n+1} - ap_n)$$

$$q_{n+2} = a(q_{n+1} - dq_n) + cbq_n + dq_{n+1}$$

D'où l'on déduit les deux relations demandées.

3. Appliquer les idées précédentes pour calculer en fonction de $n$ le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}.$$

On pose $p_0 = 2$ et $q_0 = 1$ de sorte que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$.

On a alors $p_1 = 6p_0 + 5q_0 = 17$ et $q_1 = p_0 + 2q_0 = 4$. La relation de récurrence vérifiée par ces suites est :

$$p_{n+2} = 8p_{n+1} - 7p_n$$

L'équation caractéristique de ce type de suite est :

$$(C)\ \ r^2 = 8r - 7$$

et ses racines sont $r_1 = 1$ et $r_2$=7. On a donc deux nombres $\lambda$ et $\mu$ tels que $p_n = \lambda + \mu 7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La donnée de $p_0$ et $p_1$ nous donne le système suivant :

$$\lambda + \mu = 2$$

$$\lambda + 7\mu = 17$$

On en déduit $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\mu = \dfrac{5}{2}$, et

$$p_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}7^n$$

De même, on a :

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}7^n$$

On en déduit l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ :

$$u_n = \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}7^n}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}7^n}$$

$$u_n = 5 - \frac{6}{1 + 7^n}$$

**Exercice 5.** *Injections, surjections, bijections*

1. On note $Id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que $f$ est bijective.

   Montrons d'abord l'injectivité en prouvant, pour $(x_1, x_2) \in E^2$, que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. On suppose donc que $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(f(f(x_1))) = f(f(f(x_2)))$.

   Ainsi, puisque $f \circ f \circ f = Id_E$, $x_1 = x_2$.

   Montrons maintenant la surjectivité de $f : E \to E$. Soit donc $y \in E$, on doit prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $f(f(f(y))) = y$ donc $x = f(f(y))$ est un antécédent de $y$ par $f$.

   Puisque $f$ est injective et surjective, c'est une bijection.

2. A quelle condition sur les sous-ensembles $A$ et $B$ d'un ensemble $E$ donné l'application : $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie pour toute partie $X$ de $E$ par $\phi(X) = (A \cap X, B \cap X)$ est-elle injective ? surjective ?

   — Injectivité :

   Prouvons que $\phi$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

   Si $A \cup B \neq E$, on a $x \in E$ qui n'appartient ni à $A$ ni à $B$ donc :

   $$\phi(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   $$\phi(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   et l'on voit donc que $\phi$ n'est pas injective. Par contraposée, on a déjà prouvé que si $\phi$ est injective, alors $A \cup B = E$.

   Prouvons maintenant la réciproque, soient donc $A$ et $B$ deux parties de $E$ telles que $A \cup B = E$. Dans ce cas, si $X \in \mathcal{P}(E)$, prouvons que l'on a :

   $$X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

   Si $x \in X$, puisque $A \cup B = E$ on est toujours dans au moins l'un de ces deux cas :

   — si $x \in A$ alors $x \in (X \cap A)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$ ;

   — si $x \in B$ alors $x \in (X \cap B)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$.

   La première inclusion est prouvée, si maintenant $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$, dans les deux cas possibles on a bien $x \in X$ donc la deuxième inclusion est triviale.

   Si $A \cup B = E$, pour prouver l'injectivité, supposons maintenant que deux parties $X_1$ et $X_2$ vérifient $\phi(X_1) = \phi(X_2) = (C, D)$. Alors on vient de voir que $X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = C \cup D$ et de même $X_2 = C \cup D$ donc $X_1 = X_2$.

   — Surjectivité :

   Prouvons que $\phi$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

   Si $A \cap B \neq \emptyset$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent $X$ par $\phi$ car il est impossible que $X \cap A = \{x\}$ et $X \cap B = \emptyset$ puisque $x \in B$. Donc $\phi$ n'est pas surjective et l'on a prouvé par contraposée que si $\phi$ est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.

   Supposons maintenant que $A \cap B = \emptyset$, prouvons que $\phi$ est surjective. Soit donc $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, notons alors $X = A' \cup B'$. Il est clair que $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ puisque $A'$ et $B'$ sont inclus respectivement dans $A$ et $B$ eux même disjoints. Donc $\phi(X) = (A', B')$ et la surjectivité est prouvée.