Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Quantificateurs*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est la fonction nulle : $\forall x \in I,\ f(x) = 0$.
2. f s'annule : $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.
3. f est à valeurs positives : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.
4. f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = c$.
5. f est strictement croissante sur I : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Exercice 2. *Rationnels et irrationnels.*

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.
   Soient x et y dans $\mathbb{Q}$, on a alors a et c dans $\mathbb{Z}$, b et d dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$.
   On en déduit que $x + y = \frac{ad+bc}{bd}$ où $ad + bc \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $a + b \in \mathbb{Q}$.
   De même, $xy = \frac{ac}{bd}$ où $ac \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $ab \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   Par l'absurde, supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et que $x + y \in \mathbb{Q}$.
   On aurait alors $y = -1x+(x+y)$ où $-1x \in \mathbb{Q}$ (car -1 et x sont rationnels) et $(x+y) \in \mathbb{Q}$.
   On en déduirait que $y \in \mathbb{Q}$, ce qui est la contradiction désirée.
3. Somme de deux irrationnels.
   (a) Montrer que $\sqrt{10}$ est irrationnel.
   Supposons par l'absurde que $\sqrt{10}$ est rationnel, on a alors deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{10} = \dfrac{p}{q}$. On suppose en outre que p et q n'ont pas de diviseur commun, c'est à dire que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $p^2 = 10q^2$.
   Avant d'aller plus loin, rappelons le résultat suivant que nous avons démontré en cours par contraposée : si $p \in \mathbb{N}$ vérifie que p^2 est pair, alors p est pair. Par contraposition, il s'agissait de montrer que si p est impair, alors son carré est impair. Ceci se fait en écrivant qu'un entier p impair peut se mettre sous la forme $p = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, et que son carré est alors de la forme $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et est donc impair.
   Revenant à notre raisonnement par l'absurde, on observe que $p^2 = 2(3q^2)$ est pair, donc que p est pair et peut s'écrire $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. On obtient alors $4p'^2 = 10q^2$ donc $2p'^2 = 5q^2$, c'est à dire $2(p'^2 - 2q^2) = q^2$. On déduit de cette dernière égalité que q^2 est pair donc que q est pair. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que p et q sont sans diviseur commun, et termine la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{10}$.

(b) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est irrationnel.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe a et b entiers tels que $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$. En élevant cette égalité au carré, on obtient $2+5+2\sqrt{10}=\frac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{10}=\frac{a^2-7b^2}{2b^2}$. Cette dernière écriture signifie que $\sqrt{10}$ est rationnel, fournissant la contradiction désirée.

(c) La proposition suivante est-elle vraie : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2\,,\ x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?
Cette proposition est fausse : en effet, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mais leur somme est $0 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3. *Une inéquation fonctionnelle, Suède* 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y)-f(x)| \leq 7(x-y)^2.$$

On considère une fonction f qui est solution de notre problème.
On considère deux nombres x et y réels tels que $x<y$. On coupe l'intervalle $[x,y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0=x$, x_1, x_2,...,$x_n=y$, de sorte que pour tout entier k entre 0 et n, $x_k = x + k\frac{y-x}{n}$.

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k)-f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$?
   Cette somme est télescopique donc on obtient : $S=f(x_n)-f(x_0)=f(y)-f(x)$.
2. A l'aide des questions précédentes, montrer que si x et y sont des réels tels que $x<y$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$

   On rappelle que l'on a :

$$f(y)-f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

   On en déduit par inégalité triangulaire :

$$|f(y)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

   Or si $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$|a_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq 7(x_k-x_{k-1})^2 = 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$

   On en déduit :

$$|f(y)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$

$$|f(y)-f(x)| \leq n\frac{7(x-y)^2}{n^2}.$$

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$

3. Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que $|f(y) - f(x)| = 0$.
   Comme $\frac{7(x-y)^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit de la question précédente que : $|f(y) - f(x)| \leq 0$ donc $|f(y) - f(x)| = 0$.
4. On a montré dans la question précédente qu'une fonction qui est solution du problème est constante, puisque pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, on a $f(x) = f(y)$. Réciproquement, toute fonction constante est une solution.

Exercice 4. *Calculs de sommes*

1. Sommes doubles.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons les sommes suivantes :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j) \\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(i+j) \\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} j\right) \\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)j\right) \\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j \\
S_1 &= \frac{n(n+1)^2}{2} + (n+1)\frac{n(n+1)}{2} \\
S_1 &= n(n+1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{0\leq i\leq j\leq n} (i+j) \\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(i+j) \\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} i + \sum_{i=0}^{j} j\right) \\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + (j+1)j\right) \\
S_2 &= \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n}(j^2+j) \\
S_2 &= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)\right)$$
$$S_2 = \frac{1}{4}n(n+1)(2n+4)$$
$$S_2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$$

$$S_3 = \sum_{0\leq i<j\leq n} (i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} i + \sum_{i=0}^{j-1} j\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + j^2\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{1}{2}j\right)$$
$$S_3 = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) - n(n+1)\right)$$
$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)2n$$
$$S_3 = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

2. Sommes binomiales.
   (a) Pour a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du binôme de Newton permettant de développer $Z_n = (a+b)^n$:

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

   Ecrire complètement, sans le signe Σ, la formule ainsi obtenue pour $n=5$:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
      i. Selon la valeur de $k \in [\![0, n]\!]$, calculer :

$$S_k = \sum_{p=1}^{n}\omega^{-kp}.$$

$$S_k = \sum_{p=1}^{n}\left(\omega^{-k}\right)^p.$$

On distingue deux cas :

— Si $\omega^{-k} = 1$, i.e. $e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 1$, ce qui équivaut à $\frac{-2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ c'est à dire $k \equiv 0[n]$, alors on a :

$$S_k = \sum_{p=1}^{n} 1 = n,$$

et ceci se produit pour $k = 0$ et $k = n$ donc $S_0 = S_n = n$.

— Si $\omega^{-k} \neq 1$, donc pour k différent de 0 ou n :

$$S_k = \left(\omega^{-k}\right) + \left(\omega^{-k}\right)^2 + \left(\omega^{-k}\right)^3 + \cdots + \left(\omega^{-k}\right)^n.$$

$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\left(1 + \left(\omega^{-k}\right) + \left(\omega^{-k}\right)^2 + \cdots + \left(\omega^{-k}\right)^{n-1}\right).$$

$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\frac{1 - \left(\omega^{-k}\right)^n}{1 - \left(\omega^{-k}\right)}$$

$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\frac{1 - e^{-2ik\pi}}{1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}$$

$$S_k = 0.$$

ii. Montrer alors que l'on a si $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n = n(z^n + 1).$$

Indication :on pourra écrire cette somme comme une double somme, puis permuter les sommes.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} z^k \left(\omega^p\right)^{n-k} \\
\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{n} \tbinom{n}{k} z^k \omega^{np}\omega^{-kp} \\
\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} z^k \sum_{p=1}^{n} \omega^{np}\omega^{-kp}
\end{aligned}$$

Or $\omega^{np} = e^{-2ik\pi} = 1$ donc on a :

$$\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k S_k$$

D'après la question précédente, les seuls termes non nuls de la somme sont pour $k = 0$ et $k = n$ donc :

$$\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{n} S_n z^n = n + nz^n.$$

Exercice 5. *Divergence de la série harmonique*

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Quelle propriété de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie assure que cette suite a une limite. De quel type de limite peut-il s'agir ?

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle admet une limite qui est un nombre $l \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - u_n$.

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

   On remarque que pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, d'où l'on déduit :

$$v_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

$$v_n \geq (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n}$$

   Cette dernière inégalité une fois simplifiée, assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq \frac{1}{2}$.

3. Déduire des deux questions précédentes que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite u ne tend pas vers $+\infty$, on a alors d'après la première question un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. On en déduit que $v_n = u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - l = 0$.

   Ceci est contradictoire avec l'inégalité $v_n \geq \frac{1}{2}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.