Devoir surveillé

Exercice 1. *Nature de suites.*

Étudier la nature des suites suivantes (convergentes ou divergentes), et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4**. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

Exercice 2. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

   $$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   et ainsi de suite,

   $$u_n = \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   avec n radicaux.
   Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

   $$1 \leq u_n \leq \phi.$$

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

   $$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

   $$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 3. *Exercice annoncé*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie les hypothèses de la question précédente, montrer qu'elle converge vers une limite l à préciser, qui ne dépend pas de u_0
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie les hypothèses des questions précédentes, montrer que la suite v telle que $v_n = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite constante.
4. Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. *Définition des limites*

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Que signifie :

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 5. *Limites avec la partie entière*

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \ g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \ h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 6. *Sans limites*

Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limites :

1. $x \mapsto \sin(1/x)$ en 0 ;
2. $x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$.