Devoir surveillé

Exercice 1. *Le théorème de la moyenne de Césaro*

On appelle suite des moyennes de Césaro associée à une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de (σ_n) en fonction de propriétés de (u_n)

1. Cas d'une suite monotone et convergente.
   On suppose dans cette partie que (u_n) est une suite croissante de limite l. On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.
   (a) i. Montrer que la suite (σ_n) est croissante.
   ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq l$. Que peut-on en déduire ?
   (b) i. Etablir $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$.
   ii. En déduire que (σ_n) converge vers l.
   (c) Que dire de la suite des moyennes de Césaro d'une suite décroissante de limite l ?
2. Cas d'une suite convergente.
   Soit (u_n) une suite réelle convergente vers l.
   (a) Soit $\epsilon > 0$.
   i. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$.
   ii. Etablir que pour tout entier $n > n_0$, on a :
   $$|\sigma_n - l| \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1}.$$
   iii. Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$n \geq n_1 \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
   (b) Conclure que (σ_n) converge vers l.
   (c) On suppose ici que la suite (σ_n) converge vers le réel l . On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.
   i. Montrer que la suite (u_n) n'est généralement pas convergente. On pourra exhiber un contre-exemple.
   ii. Montrer qu'une suite (u_n) qui fournit un contre-exemple n'est pas nécessairement bornée. On pourra considérer la suite (u_n) définie par :
   $$\begin{cases} u_n = p & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = p^3 \\ u_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   iii. On suppose en outre que la suite (u_n) est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante. Montrer alors par l'absurde que la suite (u_n) est majorée par l. Conclure.

3. Cas des suites périodiques Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite réelle T périodique i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+T} = u_n.$$

On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction. On pose aussi :

$$s = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1}}{T}.$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\, s = \dfrac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+T}}{T}$.

   (b) On considère la suite (v_n) de terme général : $v_n = (n+1)\sigma_n - (n+1)s$

      i. Montrer que (v_n) est T-périodique.

      ii. En déduire que (v_n) est bornée.

      iii. Établir que (σ_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2. *Plus petite période*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

— $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

— pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x+\tau) \neq f(x)$.

On pose

$$A = \{\tau > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.

   Indication : par l'absurde, on suppose que $T = 0$, on a donc si $n \in \mathbb{N}^*$ pour $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ un élément $t_n \in A$ tel que $0 < t_n \leq \frac{1}{n}$.

   — Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   — Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(u_n) = f(0)$

   — Conclure

3. Démontrer que T est une période pour f.

Exercice 3. *Non continue et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires*

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0.
2. On souhaite prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$, et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f(c)$.

   (a) Traiter le cas $a > 0$.

   (b) Si $a = 0$, justifier l'existence de $d \in]a,b[$ tel que $f(d) = f(0)$. Conclure.