Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Le théorème de la moyenne de Césaro*

On appelle suite des moyennes de Césaro associée à une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de (σ_n) en fonction de propriétés de (u_n)

1. Cas d'une suite monotone et convergente.
   On suppose dans cette partie que (u_n) est une suite croissante de limite l. On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.
   (a) i. Montrer que la suite (σ_n) est croissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{(n+1)u_0 + (n+1)u_1 \cdots + (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_0 - (n+2)u_1 \cdots - (n+2)u_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{(n+1)u_{n+1} - u_0 - u_1 - \cdots - u_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{(u_{n+1} - u_0) + (u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{(n+1)(n+2)}$$

   Comme tous les nombres $u_{n+1} - u_0$, $u_{n+1} - u_1$ ..., $u_{n+1} - u_n$ sont positifs puisque la suite est croissante, on a donc $\sigma_{n+1} - \sigma_n \geq 0$.
   La suite (σ_n) est donc croissante.

   ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq l$. Que peut-on en déduire ?
   On a en effet puisque u est croissante de limite l : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq l$. On a donc :

$$\sigma_n \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} l}{n+1} = l.$$

   On en déduit, puisque la suite est croissante et majorée, que (σ_n) est convergente vers $l' \in \mathbb{R}$, et que $l' \leq l$ par passage des inégalités larges à la limite.

   (b) i. Etablir $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sigma_{2n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n+1}}{2n+2}$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{2n+2} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n+1}}{2n+2}$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{2n+2} u_k}{2n+2}$$

Par croissance de la suite (u_n), on a, si $k \geq n+1$, $u_k \geq u_{n+1}$ d'où :

$$\sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{2n+2} u_{n+1}}{2n+2}$$

$$\sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{(n+1)u_{n+1}}{2n+2}$$

$$\sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}.$$

ii. En déduire que (σ_n) converge vers l.

Par passage des inégalités larges à la limite, on a d'après la question précédente $l' \geq \frac{1}{2}l' + \frac{1}{2}l$ d'où l'on déduit $l' \geq l$. On avait déjà remarqué à la question 1(a)ii que $l' \leq l$ donc $l' = l$ et les deux suites σ et u ont la même limite

(c) Que dire de la suite des moyennes de Césaro d'une suite décroissante de limite l ?

Si u est une suite décroissante de limite l, notons σ_u sa suite des moyennes de Césaro. Considérons alors la suite $v = -u$ et sa suite de Césaro σ_v associée. La suite v est croissante de limite $-l$ donc d'après les questions précédentes σ_v a aussi pour limite $-l$. On remarque que $\sigma_u = -\sigma_v$ et que la suite σ_u converge donc vers l.

2. Cas d'une suite convergente.

Soit (u_n) une suite réelle convergente vers l.

(a) Soit $\epsilon > 0$.

i. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$.

C'est la définition d'une suite convergente de limite l.

Il aurait fallu poser la question ainsi : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ceci est encore vrai puisque $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ est strictement positif, donc on peut appliquer la définition d'une limite avec $\frac{\epsilon}{2}$.

ii. Etablir que pour tout entier $n > n_0$, on a :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1}.$$

On calcule :

$$|\sigma_n - l| = \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - l \right|$$

$$|\sigma_n - l| = \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \ - (n+1)l}{n+1} \right|$$

$$|\sigma_n - l| = \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - l)}{n+1} \right|$$

On en déduit par inégalité triangulaire :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |u_k - l|}{n+1}$$

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1}.$$

iii. Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_1 \Rightarrow \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Cette question est mal posée. Son résultat est vrai mais ce n'est pas évident de le démontrer. Il aurait fallu demander de prouver :

$$n \geq n_1 \Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Il suffisait alors de remarquer que le numérateur est une constante qui ne dépend pas de n, et donc que :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puis d'appliquer la définition d'une limite avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0$.

(b) Conclure que (σ_n) converge vers l.

Il faut remarquer que si l'on choisit $n \geq n_1$, on a alors d'après les questions précédentes :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} + \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1}$$

$$\text{avec } \frac{\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\epsilon}{2}}{n+1},$$

$$\text{d'où } \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n+1} \leq \frac{n-n_0}{n+1}\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit enfin :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On a, pour un $\epsilon > 0$ fixé, trouvé un rang n_1 à partir duquel ceci est vrai, donc $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

(c) On suppose ici que la suite (σ_n) converge vers le réel l . On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

i. Montrer que la suite (u_n) n'est généralement pas convergente. On pourra exhiber un contre-exemple.

Un contre-exemple est donné par la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\sigma_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $\sigma_{2n+1} = 0$ donc les deux suites extraites de (σ_n) d'indices pairs ou impairs tendent vers 0. Ainsi, $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais il est clair que (u_n) n'a pas de limite puisque ses suites extraites d'indices pairs et impairs tendent respectivement vers 1 et -1.

ii. Montrer qu'une suite (u_n) qui fournit un contre-exemple n'est pas nécessairement bornée. On pourra considérer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = p & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = p^3 \\ u_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est la somme des entiers naturels p tels que $p^3 \leq n$, c'est à dire tels que $p \leq n^{\frac{1}{3}}$, ce qui équivaut à $p \leq [\![n^{\frac{1}{3}}]\!]$. Or on sait que :

$$\sum_{p=0}^{[\![n^{\frac{1}{3}}]\!]} p = \frac{1}{2}[\![n^{\frac{1}{3}}]\!]([\![n^{\frac{1}{3}}]\!] + 1) \leq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{1}{3}} + 1)$$

On en déduit que :

$$0 \leq \sigma_n \leq \frac{n^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{1}{3}} + 1)}{2(n+1)}$$

$$0 \leq \sigma_n \leq \frac{n^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{1}{3}} + 1)}{2(n+1)}$$

$$0 \leq \sigma_n \leq \frac{n^{\frac{2}{3}}(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})}{n(2 + \frac{2}{n})}$$

$$0 \leq \sigma_n \leq \frac{(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})}{n^{\frac{1}{3}}(2 + \frac{2}{n})}$$

Par encadrement, puisque $\frac{(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})}{n^{\frac{1}{3}}(2+\frac{2}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, que $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En revanche, $u_{n^3} = n$ donc $u_{n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la suite u ne converge pas.

iii. On suppose en outre que la suite (u_n) est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante. Montrer alors par l'absurde que la suite (u_n) est majorée par l. Conclure.

Par l'absurde, supposons donc qu'il existe un entier N tel que $u_N > l$. On a alors pour $n > N$:

$$\sigma_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} u_k}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n} u_k}{n+1}$$

Par croissance de la suite, on a donc :

$$\sigma_n \geq \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} u_k}{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=N+1}^{n} u_N}{n+1}$$

$$\sigma_n \geq \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} u_k}{n+1} + \frac{(n-N)u_N}{n+1}$$

Par passage des inégalités larges à la limite, on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$l \geq u_N,$$

ce qui fournit la contradiction désirée. Ainsi, (u_n) est majorée et croissante, donc convergente. On déduit de la première question que (u_n) converge vers l.

3. Cas des suites périodiques Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite réelle T périodique i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n.$$

On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction. On pose aussi :

$$s = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1}}{T}.$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s = \dfrac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+T}}{T}$.

Prouvons le par récurrence. Pour $n = 0$, c'est vrai car par périodicité, $u_0 = u_T$ donc :

$$s = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1}}{T} = \frac{u_1 + \cdots + u_{T-1} + u_T}{T}.$$

Supposons que c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on a alors puisque $u_{n+1} = u_{n+1+T}$ par périodicité :

$$s = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+T}}{T} = \frac{u_{n+2} + \cdots + u_{n+T} + u_{n+T+1}}{T}.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier.

(b) On considère la suite (v_n) de terme général : $v_n = (n+1)\sigma_n - (n+1)s$

i. Montrer que (v_n) est T-périodique.

Calculons :

$$v_{n+T} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+T} - (n+1+T)s$$

$$v_{n+T} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1} + \cdots + u_{n+T} - Ts - (n+1)s$$

Or on vient de voir que $\frac{u_{n+1}+\cdots+u_{n+T}}{T} = s$ donc $u_{n+1} + \cdots + u_{n+T} - Ts = 0$ donc :

$$v_{n+T} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n - (n+1)s = v_n,$$

et la suite v est bien périodique de période T.

ii. En déduire que (v_n) est bornée.

En notant $M = \max\{|v_0|, |v_1|, \cdots, |v_{T-1}|\}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|v_n| \leq M$, puisque v_n est égal à l'un des nombres v_0, v_1,$\cdots$ ou v_{T-1} selon le reste de n à la division par T.

iii. Établir que (σ_n) converge et préciser sa limite.

On déduit de la question précédente :

$$|(n+1)\sigma_n - (n+1)s| \leq M$$

$$0 \leq |\sigma_n - s| \leq \frac{M}{n+1}.$$

On en déduit par encadrement que $|\sigma_n - s| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (σ_n) est convergente de limite s.

Exercice 2. *Plus petite période*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

— $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

— pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x+\tau) \neq f(x)$.

On pose

$$A = \{\tau > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.

   A est non vide puisque f est périodique, et A est minorée par 0 donc A admet une borne inférieure.

2. Démontrer que $T > 0$.

   Suivant l'indication, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que $T = 0$, on a donc si $n \in \mathbb{N}^*$ pour $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ un élément $t_n \in A$ tel que $0 < t_n \leq \frac{1}{n}$.

   Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

— On note $u_n = \left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On sait pour un réel y que $y-1 \leq \lfloor y \rfloor \leq y$.
On en déduit :

$$\left(\frac{x}{t_n} - 1\right) t_n \leq u_n \leq \frac{x}{t_n} t_n$$

$$x - t_n \leq u_n \leq x$$

Puisque $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc par encadrement $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence sur k que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f(kt_n) = f(-kt_n) = f(0).$$

Pour $k = 0$, cette propriété est évidente.
Prouvons l'hérédité. On suppose la prpriété vérifiée au rang k. Or on sait que $f(kt_n) = f(kt_n + t_n)$ puisque $t_n \in A$. On a donc bien $f((k+1)t_n) = f(0)$ par hypothèse de récurrence.
On a aussi $f(-(k+1)t_n) = f(-(k+1)t_n + t_n)$, c'est à dire $f(-(k+1)t_n) = f(-kt_n)$ d'où l'on déduit aussi que $f(-(k+1)t_n) = f(0)$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel k et l'on en déduit, si $l \in \mathbb{Z}$, que l'on a $f(lt_n) = f(0)$. En particulier, $f(u_n) = f(0)$

— Concluons : on a $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et f continue donc $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Ceci entraîne que $f(x) = f(0)$. f est donc constante, ce qui est la contradiction recherchée.

3. Démontrons que T est une période pour f : par définition de la borne inférieure, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un élément τ_n de A tel que $T \leq \tau_n \leq T + \frac{1}{n}$ de sorte que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a puisque $\tau_n \in A$:$f(x+\tau_n) = f(x)$. Par continuité de f, on a donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:$f(x+T) = f(x)$.
Ainsi, f est T-périodique.

Exercice 3. *Non continue et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires*

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0.
Notons $v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
On a $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(v_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or $f(0) = 0$ donc f ne peut être continue en 0.
2. On souhaite prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$, et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f(c)$.
   (a) Traiter le cas $a > 0$.
   Dans ce cas, f est continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc il s'agit du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue.
   (b) Si $a = 0$, justifier l'existence de $d \in]a,b[$ tel que $f(d) = f(0)$. Conclure.
   Si $a = 0$, notons pour $n \in \mathbb{N}*$: $u_n = \frac{1}{n\pi}$. Puisque $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $b > 0$, on a un entier n tel que $0 \leq u_n \leq b$. Notant $d = u_n$, on a alors $f(d) = 0 = f(0)$ et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[d,b]$ pour s'assurer que toute valeur strictement comprise entre $f(a) = f(d)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans l'intervalle.